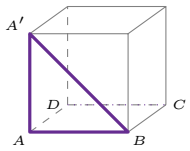
Unghiuri în spațiu

Ideea

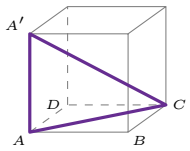
Orice unghi din spațiu se aduce **într-un triunghi dreptunghic**: unghi → triunghi dreptunghic → Pitagora → sin, cos, tg sau $30°, 45°, 60°$

Cele trei unghiuri (în desene: cubul $ABCDA'B'C'D'$)



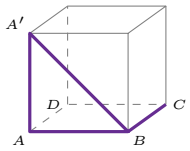
Două drepte unghiul a două drepte *concurente*

dreptele → duc o paralelă la una, până se taie → triunghi
$A'B$ și CD: $CD \parallel AB \Rightarrow \angle A'BA = 45°$



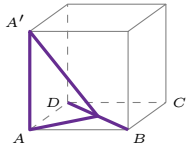
Dreaptă și plan $\angle(d, \alpha) = \angle(d,$ proiecția lui d pe $\alpha)$

dreapta → proiecția pe plan → triunghi dreptunghic (perpendiculara pe plan = catetă)
$A'C$ și (ABC): proiecția AC, $\operatorname{tg}\angle A'CA = \dfrac{AA'}{AC}$



Două plane unghiul diedru = unghiul plan corespunzător

muchia comună → câte o perpendiculară pe ea în fiecare plan → triunghi
$(A'BC)$ și (ABC): $A'B \perp BC,\ AB \perp BC \Rightarrow \angle A'BA = 45°$



Distanțe $AA' \perp (ABC),\ AO \perp BD \Rightarrow A'O \perp BD$

punct → perpendiculara pe plan → perpendiculara pe dreaptă → triunghi dreptunghic
$d(A', BD) = A'O$ $\quad d(A, (A'BD))$ = înălțimea din A în $\triangle A'AO$

Perpendicularitate și corpuri rotunde

$d \perp \alpha \iff d \perp$ două drepte concurente din α	dreaptă perpendiculară pe plan
$\beta \supset d,\ d \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$	plane perpendiculare (unghi 90°)
secțiunea axială	corp rotund → triunghi sau dreptunghi: $G^2 = h^2 + R^2$ (con), $G^2 = h^2 + (R-r)^2$ (trunchi), $A'B^2 = h^2 + (2R)^2$ (cilindru)

Piramide și prisme regulate

(l = muchia bazei, h = înălțimea, O = centrul bazei, M = mijlocul lui BC)

$\boxed{VO \perp (ABC)}$ — înălțimea cade în centrul bazei: $\triangle VOA$ și $\triangle VOM$ sunt dreptunghice în O

$VA^2 = VO^2 + OA^2$ — muchia laterală VA = ipotenuză

$VM^2 = VO^2 + OM^2$ — apotema piramidei VM = ipotenuză

	OA	OM
baza pătrat	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$ jumătate de diagonală	$\frac{l}{2}$
baza triunghi	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2}{3}$ din înălțimea bazei	$\frac{l\sqrt{3}}{6}$ $\frac{1}{3}$ din înălțimea bazei

$AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $A'M^2 = AA'^2 + AM^2$ — prismă triunghiulară regulată

$\boxed{d = \frac{\text{cateta} \cdot \text{cateta}}{\text{ipotenuza}}}$ — distanța de la piciorul înălțimii la un plan înclinat: înălțimea din unghiul drept

Ce văd → ce aplic

două drepte neconcurente	→	paralela prin capătul unei drepte
dreaptă înclinată față de plan	→	proiecția ei: perpendiculara din vârf pe plan
două plane care se taie	→	perpendiculare pe muchie, câte una în fiecare plan
distanță punct–dreaptă sau punct–plan	→	teorema celor trei perpendiculare, apoi înălțimea în triunghiul dreptunghic
unghi cerut $(30°, 45°, 60°)$	→	$\text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg}\ 45° = 1$, $\text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$

Atenție: unghiul a două drepte sau plane este $\leq 90°$ (dacă ies $120°$, e $180° - 120°$) · unghiul cu planul se ia cu *proiecția*, nu cu planul însuși