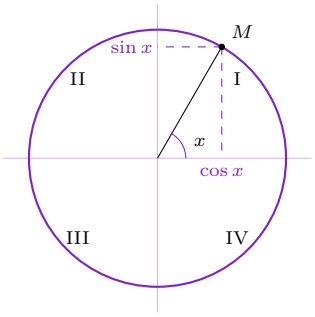
Trigonometrie

Cercul trigonometric: valori și semne



x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

cadran	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg, ctg	+	−	+	−

M = punctul de pe cerc (raza 1) la unghiul x: abscisa lui M este $\cos x$, ordonata este $\sin x$ · $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ · $180° = \pi$ rad

Reducerea la primul cadran

unghiul	sin	cos	tg	
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	funcția **rămâne**, semnul vine din cadran
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	
$2\pi - x$ sau $-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	funcția **se schimbă** ($\sin \leftrightarrow \cos$)
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	

Unghi mare: scad perioada ($360°$ pentru $\sin, \cos$; $180°$ pentru tg), apoi reduc. cos e pară: $\cos(-x) = \cos x$ $\sin, \operatorname{tg}$ sunt impare.

Formula fundamentală

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ — dau $\sin x \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$; semnul $\pm$ îl iau din cadran

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$ — leagă tg de cos

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$ — dau suma, aflu produsul (și invers)

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x - 1}$$ — dau $\operatorname{tg} x$: împart sus și jos la $\cos x$

Triunghiul

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

a, b, c = laturi, A, B, C = unghiurile opuse, R = raza cercului circumscris

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$ — din ea: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$ — aria; $A + B + C = 180°$

Adunare, unghi dublu, unghi jumătate

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$ — a, b = două unghiuri; $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$ — semnul se **inversează** la cos

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$ — pun $b = a$ în formulele de mai sus

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$ — trei forme: o aleg pe cea cu ce știu

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$ — jumătate: extrag rădăcina, semnul din cadranul lui $\frac{a}{2}$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a, \quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$ — unghi triplu

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$ — tangenta unghiului triplu

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}, \quad \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}$$ — $\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$

Sume ↔ produse

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \qquad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \qquad \cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Produse celebre ($\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$): înmulțesc și împart cu $\sin a$, apoi $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ de mai multe ori $\Rightarrow \cos a \cos 2a \cos 4a = \dfrac{\sin 8a}{8 \sin a}$

Ecuații pe $[0, 2\pi]$

$\sin x = a$	$x = \arcsin a$ și $x = \pi - \arcsin a$
$\cos x = a$	$x = \arccos a$ și $x = 2\pi - \arccos a$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a$ și $x = \operatorname{arctg} a + \pi$
$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = a$	$u = 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}]$: $u = \arcsin a + 2k\pi$ sau $\pi - \arcsin a + 2k\pi$, apoi $x = \frac{u - \pi/6}{2}$
ecuație de gradul 2 în $\sin x$	notez $t = \sin x$, rezolv, păstrez doar $\lvert t \rvert \le 1$
$\sin 2x = \sin x$	$\sin x(2\cos x - 1) = 0$: factor comun, fiecare factor $= 0$

Ce văd → ce aplic

$\sin 75^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$	→	adunare, cu $45^\circ + 30^\circ$
$\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$	→	adunarea „citită invers”
$\sin x + \sin 3x$, $\cos x \cos 3x$	→	sumă ↔ produs
„arătați că” (identitate)	→	duc o parte la cealaltă; caut $\sin^2 + \cos^2$, unghi dublu
trei laturi → unghi; două laturi + unghi → latură	→	cosinus
o latură și unghiul opus, sau R	→	sinus

Atenție: $\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$ · semnul rădăcinii vine din cadran · $\sin^2 x$ înseamnă $(\sin x)^2$ · la ecuații verific mereu intervalul cerut