Puterile unei matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Notații ($t = \operatorname{tr} A$ = suma de pe diagonala principală; $d = \det A$; I_2 unitate, O_2 nulă)

$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ factori}}$	nu ridic elementele la puterea n; $AB \neq BA$ în general
$A^2 = t\,A - d\,I_2$	Cayley–Hamilton, $d = \det A$: din ea scot orice putere
$\det(A^n) = (\det A)^n$	control rapid

Schema: calculez → ghicesc → demonstrez

calculez A^2, A^3 (linie × coloană) → ghicesc forma lui A^n → inducție: $P(1)$ și $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Formulele pentru A^n (calculez întâi t și d)

$d = 0:\quad A^2 = tA \;\Rightarrow\; A^n = t^{n-1}A$	$t = 1$: $A^n = A$ (idempotentă)
$t = 2,\ d = 1:\quad A^n = I_2 + nB,\ \ B = A - I_2$	$B^2 = O_2$
$t = 0:\quad A^2 = -d\,I_2$	$A^{2p} = (-d)^p I_2,\ \ A^{2p+1} = (-d)^p A$
$A = aI_2 + B,\ B^2 = O_2:\quad A^n = a^n I_2 + n\,a^{n-1}B$	binomul lui Newton (I_2 comută cu B); apare la $t^2 = 4d$, $a = \frac{t}{2}$
A triunghiulară ($c = 0$)	calculez A^2, A^3, ghicesc, inducție
$A(x) = I_2 + xB,\ B^2 = O_2:\ A(x)A(y) = A(x+y)$	$\big(A(a)\big)^n = A(na)$
$A^n = x_n A + y_n I_2$	cazul general: $A^{n+1} = x_n A^2 + y_n A$, recurență pentru x_n, y_n

Ce văd → ce aplic

„găsiți A^n”	→ t, d → tipul din tabel → formula → inducție
sumă $A + A^2 + \cdots + A^n$	→ $d = 0$: $\dfrac{t^n - 1}{t - 1}A$; $I_2 + nB$: $nI_2 + \dfrac{n(n+1)}{2}B$; $A^2 = I_2$: $n(A + I_2)$ pentru $2n$ termeni
A^{2027}, putere mare	→ $A^2 = I_2$ sau $A^2 = kI_2$: scriu $2027 = 2p + 1$
„elementul a_{ij} al lui A^n este …”	→ formula lui A^n, apoi ecuație în n
$A(x)$ cu $A(x)A(y) = A(x+y)$	→ $A(x) = I_2 + xB$, $B^2 = O_2$; $A(x)^n = A(nx)$

Atenție: „se vede din primele puteri” nu e demonstrație: inducție obligatorie · $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ doar dacă $AB = BA$ · verific formula pentru $n = 1$