Progresii aritmetice și geometrice

PA și PG față în față

	PA (adun mereu r)	**PG** (înmulțesc mereu cu q)
rația: pasul dintre doi termeni vecini	$r = a_{n+1} - a_n$	$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ (termeni $\neq 0$)
termenul general	$a_n = a_1 + (n-1)\,r$	$b_n = b_1 \cdot q^{\,n-1}$
pornind din termenul k	$a_n = a_k + (n-k)\,r$	$b_n = b_k \cdot q^{\,n-k}$
suma primilor n termeni	$S_n = \dfrac{n\,(a_1+a_n)}{2} = \dfrac{n\,(2a_1+(n-1)r)}{2}$	$S_n = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$, $q\neq 1$; $q=1$: $S_n = n\,b_1$
termenul din mijloc (a, b, c consecutivi)	$2b = a + c$	$b^2 = a\,c$ (nenuli)

a_1 = primul termen · n = locul termenului (numărul de termeni) · r, q = rația · $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ = suma primilor n

Schema de lucru

am a_1 și r $\rightarrow$ $a_n = a_1 + (n-1)\,r$ $\rightarrow$ $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

am doi termeni a_i, a_j $\rightarrow$ $r = \dfrac{a_j - a_i}{j - i}$ $\rightarrow$ $a_1 = a_i - (i-1)\,r$ $\rightarrow$ a_n, S_n

am doi termeni b_i, b_j $\rightarrow$ $q^{\,j-i} = \dfrac{b_j}{b_i}$ $\rightarrow$ $b_1 = \dfrac{b_i}{q^{\,i-1}}$ $\rightarrow$ b_n, S_n (exponent par: $q = \pm$)

Ce văd → ce aplic

șir dat prin formula lui x_n	→ $x_{n+1} - x_n$ constant ⇒ PA; $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ constant ⇒ PG; altfel nici una
recurență $x_{n+1} = x_n + c$ / $x_{n+1} = c\,x_n$	→ PA cu $r = c$ / PG cu $q = c$
„este N termen al șirului?”	→ rezolv $x_n = N$; răspuns doar dacă $n \in \mathbb{N}^*$
suma S_n dată, n necunoscut	→ PA: ecuație de gradul 2 în n; PG: $q^n = \ldots$; păstrez doar $n \in \mathbb{N}^*$
S_n dat ca formulă în n	→ $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ pentru $n \geq 2$; verific dacă merge și la $n = 1$
trei expresii „în progresie”	→ $2b = a + c$ (PA) / $b^2 = ac$ (PG), apoi verific termenii
trei numere cu sumă și produs	→ PA: $a-r$, a, $a+r$ / PG: $\dfrac{a}{q}$, a, aq
două relații în a_1, r	→ aduc la termenul din mijloc ($a_2 + a_4 = 2a_3$); PG: $b_2 + b_4 = q\,(b_1 + b_3)$, împart
rădăcinile unei ecuații de gradul 3 în progresie	→ Viète: PA $x_2 = \dfrac{S}{3}$; PG $x_2 = \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{S}$, $S = x_1 + x_2 + x_3$
$a_n = m$ și $a_m = n$	→ scad: $r = -1$, $a_p = m + n - p$
$S_m = n$ și $S_n = m$	→ $\dfrac{S_k}{k} = a_1 + \dfrac{k-1}{2}\,r$; scad cele două relații
$\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$ într-o sumă	→ $= \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$, termenii se reduc (telescopare, lecția $\sum$)
suma multiplilor lui k până la N	→ $k \cdot \dfrac{m(m+1)}{2}$, m = câți multipli; nedivizibili cu k = total − multipli

Atenție: $a_n = a_1 + (n-1)\,r$, nu $n\,r$ · $q = 1$: formula cu $q - 1$ nu merge · $b^2 = ac$ cere termeni nenuli