Primitive și integrare

Primitive și tabelul de bază

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$ — F = primitiva: $F' = f$; C = o constantă oarecare

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$ — scot constantele, rup suma în bucăți

$$\int f(kx+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$$ — argument liniar: împart la k

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

Integrala definită

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$ — Leibniz–Newton: C dispare; a, b = capetele

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$ — schimb capetele → schimb semnul; pot rupe intervalul

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$F(x_0) = y_0$ — primitivă impusă: scriu $F = \int f + C$, din $F(x_0) = y_0$ aflu C

Substituția (metoda I) (în integrală apare $u(x)$ și derivata ei)

$$\int f\big(u(x)\big)u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,dt, \quad t = u(x)$$ — înlocuiesc $u(x)$ cu t și $u'(x)\,\mathrm{d}x$ cu dt; la nedefinită revin la x

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$ — la definită schimb capetele și nu mai revin la x

Integrarea prin părți

$$\int f\,g'\,\mathrm{d}x = f\,g - \int f'\,g\,\mathrm{d}x$$ — f = factorul care se simplifică prin derivare; g' = restul, ușor de integrat

$$\int_a^b f\,g'\,\mathrm{d}x = f\,g\big|_a^b - \int_a^b f'\,g\,\mathrm{d}x$$ — la definită, evaluez $f\,g$ la capete

$P(x)\,e^{kx}$, $P(x)\sin kx$	→	$f = P(x)$	→ P de grad n: aplic formula de n ori
$x^n \ln x$, $\ln(ax+c)$, $x^n \ln^2 x$	→	$f = \ln$	→ $g' = x^n$ (sau 1 pentru $\ln(ax+c)$)
$P(x)\operatorname{arctg} x$	→	$f = \operatorname{arctg} x$	→ integrala rămasă e fracție: separ partea întreagă
$e^{ax}\sin bx$	→	oricare	→ ciclică: I reapare în dreapta, rezolv ecuația în I

Funcții raționale (P/Q)

$\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$	$\to$	$\dfrac{P}{Q} = \text{cât} + \dfrac{\text{rest}}{Q}$	$\to$ împart întâi
$\dfrac{A}{x+a}$	$\to$	$A \ln(x+a)$	$\to$ rădăcină simplă
$\dfrac{B}{(x+a)^2}$	$\to$	$-\dfrac{B}{x+a}$	$\to$ rădăcină dublă
$\dfrac{Cx+D}{x^2+k^2}$	$\to$	$\dfrac{C}{2}\ln(x^2+k^2) + \dfrac{D}{k}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}$	$\to \Delta < 0$

Funcții trigonometrice $R(\sin x, \cos x)$ (verific pe rând)

$R(-\sin x, \cos x) = -R$: impară în sin	$\to$	$t = \cos x$	$\to dt = -\sin x\,dx$
$R(\sin x, -\cos x) = -R$: impară în cos	$\to$	$t = \sin x$	$\to dt = \cos x\,dx$
$R(-\sin x, -\cos x) = R$: pară în ambele	$\to$	$t = \operatorname{tg} x$	$\to dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$
niciuna	$\to$	$t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$	$\to dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Aplicații

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$	aria dintre grafic și Ox; $f \geq 0$: fără modul; f schimbă semnul: rup în zerourile lui f
$V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx$	volumul la rotația în jurul lui Ox: pătratul lui f și factorul π
$\displaystyle\int_{-c}^{c} f = 0$ (f impară)	interval simetric: impară înseamnă $f(-x) = -f(x)$
$\displaystyle\int_{-c}^{c} f = 2\int_0^c f$ (f pară)	pară înseamnă $f(-x) = f(x)$

Substituția $x = \varphi(t)$ (metoda a II-a), recurențe, parametru

$\sqrt{a^2-x^2}$	$\to$	$x = a\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\to \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ ($\cos t \geq 0$)
$\sqrt{x}$	$\to$	$x = t^2$, $t \geq 0$	$\to dx = 2t\,dt$
$\dfrac{g(x)}{g(x)+g(a+b-x)}$	$\to$	$x = a+b-t$	$\to 2I = \displaystyle\int_a^b 1\,dx = b-a$
$I_n = \displaystyle\int x^n \cdots$	$\to$	prin părți sau $I_n + I_{n-1}$	$\to I_0$ direct, apoi pas cu pas; $\lim I_n$ prin încadrare
parametru a în integrală	$\to$	integrala e liniară în a	$\to$ ecuație de gradul întâi în a
parametru m în capăt	$\to$	calculez în funcție de m	$\to$ rezolv ecuația în m

Ce văd $\to$ ce aplic

e^{kx}, $\sin kx$, $\cos kx$	$\to$ direct, împart la k	$x\,e^{x^2}$, $\dfrac{x}{a+x^4}$	$\to t = x^2$
$\dfrac{\ln^n x}{x}$, $\dfrac{1}{x\ln x}$	$\to t = \ln x$	$\dfrac{u'}{u}$, $\dfrac{e^x}{e^x+a}$	$\to t = u$, $\ln\lvert u\rvert$
$x(x^2+a)^n$	$\to t = x^2 + a$	$\sin^n x \cos x$	$\to t = \sin x$
$\cos^n x \sin x$	$\to t = \cos x$ (cu minus)	$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$	$\to \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $t = \cos x$
$\dfrac{1}{e^x+a}$	$\to t = e^x$, apoi rațională	$\dfrac{dx}{x^2+a^2}$, $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\to$ arctg, arcsin din tabel

Atenție: capete schimbate la substituție · semnul lui sin/cos ($\int \sin = -\cos$) · factorul $\frac{1}{k}$ la argument liniar · π și pătratul la volum · $\ln|\cdot|$ pe domeniu: $\ln x$ doar pentru $x > 0$