Mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

Opus, modul, comparare, axă

$a + (-a) = 0, \quad -(-a) = a$

opusul lui a este $-a$ (același loc față de 0, de cealaltă parte)

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

modulul = distanța de la număr la 0; nu e niciodată negativ; $|a| = |-a|$

negativ $< 0 <$ pozitiv

0 nu e nici negativ, nici pozitiv; între două negative, mai mic e cel cu modulul **mai mare**

$AB = |a - b|$

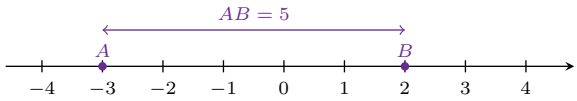
distanța dintre $A(a)$ și $B(b)$ pe axă

$$M = \frac{a+b}{2}$$

mijlocul segmentului AB = media aritmetică

$a' = 2b - a$

simetricul lui A față de B (B e mijlocul lui AA'); față de origine: $-a$



Operațiile

$(+) + (+) \to +$ și $(-) + (-) \to -$

adun modulele

adunare, același semn: adun modulele, păstrez semnul

scad modulele

semnul celui cu modul mai mare

adunare, semne diferite

$a - b = a + (-b), \quad a - (-b) = a + b$

scădere = adunare cu opusul; minus în fața unei paranteze schimbă semnul fiecărui termen din ea

$(+) \cdot (+) = +, \ (-) \cdot (-) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

înmulțire, împărțire: semne la fel $\to +$, diferite $\to -$; număr **par** de minusuri $\to +$, **impar** $\to -$; împărțirea la 0 nu are sens

$(-a)^{\text{par}} = +, \quad (-a)^{\text{impar}} = -$

putere: $a^n = a$ înmulțit cu el însuși de n ori; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $a^1 = a$; $(-1)^{\text{par}} = 1$, $(-1)^{\text{impar}} = -1$

$-3^4 \neq (-3)^4$

minusul care nu e în paranteză nu intră în bază: întâi puterea, apoi minusul

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Regulile puterilor cer **aceeași bază**; la împărțire $m \geq n$.

Ordinea operațiilor

paranteze, module $\xrightarrow{\text{apoi}}$ puteri $\xrightarrow{\text{apoi}}$ $\cdot$ și $:$ $\xrightarrow{\text{apoi}}$ $+$ și $-$

parantezele de la interior spre exterior: $(\ ) \to [\ ] \to \{\ \}$; operațiile de același rang, **de la stânga la dreapta**

Ecuații și inecuații în $\mathbb{Z}$

$ax+b=c \;\Rightarrow\; x=(c-b):a$	mut termenul în celălalt membru **schimbându-i semnul**; apoi împart la coeficientul lui x; x pe ambele părți: strâng x într-o parte, numerele în cealaltă; $a-x=c \Rightarrow x=a-c$; verific în ecuația inițială
$\lvert u\rvert=k,\ k>0 \;\Leftrightarrow\; u=k$ sau $u=-k$	două ecuații, deci două soluții; $\lvert u\rvert=-k$ nu are soluții; $\lvert u\rvert=0 \Leftrightarrow u=0$
$\cdot(-)$ sau $:(-) \;\Rightarrow <\leftrightarrow>$	**inecuație**: la înmulțire / împărțire cu un număr **negativ** sensul se schimbă; apoi aleg doar numerele **întregi**
$<,\ >$ exclud capătul; $\leq,\ \geq$ îl includ	**strictă** / **nestrictă**; dublă inegalitate: operez în toate cele trei părți
$\lvert u\rvert\leq k \;\Leftrightarrow\; -k\leq u\leq k$	inecuație cu modul
$n-m+1$	câte numere întregi sunt de la m la n; suma soluțiilor simetrice față de a = (număr de termeni)$\cdot a$

Probleme

valoare nouă = veche $\pm$ schimbare	temperatură, altitudine: creștere / urcare se adaugă, scădere / coborâre se scade; scriu toate valorile pe rând
diferența = maxim $-$ minim	minimul și maximul se caută printre **toate** valorile, nu doar la final
$m_a=\dfrac{a+b}{2}$	media aritmetică a două numere

Ce văd → ce aplic

cel mai mic, al k-lea, cel mai mare modul	→	ordonez crescător; calculez modulele
distanță, mijloc, simetric față de un punct	→	$\lvert a-b\rvert$, $\dfrac{a+b}{2}$, $2b-a$
mai mulți termeni cu semne, paranteze	→	desfac parantezele (minus în față schimbă semnele), apoi de la stânga
puteri cu aceeași bază	→	adun / scad / înmulțesc exponenții
$\lvert x\rvert=k$, $\lvert x-a\rvert=k$	→	două ecuații
„cel mai mic / cel mai mare întreg”, „numărul / suma soluțiilor”	→	rezolv inecuația, scriu soluțiile întregi
Subiectul III, „arătați că $a=\ldots$ ”	→	ordinea operațiilor, câte un pas pe rând; apoi ecuație, număr de soluții $\lvert x\rvert\leq a$, sau media

Atenție: $(-3)+(-4)=-7$, dar $(-3)\cdot(-4)=12$ · $-12<-7$ · $AB=\lvert a-b\rvert\geq 0$ · $\lvert x\rvert\leq 5$ are 11 soluții, nu 5 · 0 nu e nici negativ, nici pozitiv