Numere complexe – formule utile

Forma algebrică

$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$

$\operatorname{Re} z = a$ — partea reală

$\operatorname{Im} z = b$ — partea imaginară

$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0$

z imaginar pur $\iff$ $\operatorname{Re} z = 0$ și $\operatorname{Im} z \neq 0$

$a + bi = c + di \iff a = c$ și $b = d$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Operații

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$

$\dfrac{1}{i} = -i$

$(1 + i)^2 = 2i, \qquad (1 - i)^2 = -2i$

$\dfrac{1 + i}{1 - i} = i, \qquad \dfrac{1 - i}{1 + i} = -i$

Puterile lui i $\quad (k \in \mathbb{N})$

$i^0 = 1, \qquad i^1 = i$

$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$

Calcul cu $\operatorname{Re} z$ și $\operatorname{Im} z$ $\quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{R})$

$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$

$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$

$\operatorname{Re}(kz) = k \operatorname{Re} z$

$\operatorname{Im}(kz) = k \operatorname{Im} z$

$\operatorname{Re} \overline{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z$

$|z|^2 = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z$

$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$

$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2$

$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$

$\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}^2 z - \operatorname{Im}^2 z$

$\operatorname{Im}(z^2) = 2 \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$

$\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}, \quad \operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = -\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$

$z^2 \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0$

z^2 imaginar pur $\iff$ $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z| \neq 0$

Conjugatul: $\overline{z} = a - bi$

$\overline{\overline{z}} = z$

$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \qquad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$

$\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$

$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

$\overline{z} = -z \iff z$ imaginar pur sau $z = 0$

Modulul: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \iff z = 0$

$|z| = |\overline{z}| = |-z|$

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad |z^n| = |z|^n$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ $\quad z \neq 0$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

Interpretare geometrică

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a, b)$

$|z| = OM$

$|z_1 - z_2| = AB$ — distanța

$\overline{z}$: simetricul lui M față de Ox

$-z$: simetricul lui M față de O

$|z| = r$: cercul $\mathcal{C}(O, r)$

$|z - z_0| = r$: cercul $\mathcal{C}(z_0, r)$

Ecuația de gradul II în $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

rădăcinile sunt conjugate: $z_2 = \overline{z_1}$

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

$z^2 = -k^2 \iff z = \pm ki$ $\quad k > 0$

$(x + yi)^2 = a + bi \iff x^2 - y^2 = a$ și $2xy = b$

Forma trigonometrică

$z = r(\cos t + i \sin t)$, unde $r = |z|$, $\cos t = \dfrac{a}{r}$, $\sin t = \dfrac{b}{r}$, $t \in [0, 2\pi)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)\big)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \big(\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)\big)$

$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt), \quad n \in \mathbb{N}$ — formula lui Moivre

Rădăcinile de ordin n: $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \dfrac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{t + 2k\pi}{n}\right)$,

$k = \overline{0, n-1}$

$\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\quad \varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \quad \overline{\varepsilon} = \varepsilon^2$

Numere complexe – exemple rezolvate

1. Forma algebrică: operații cu $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 1 + 2i$

Suma și diferența: se adună (scad) separat părțile reale și cele imaginare.

$z_1 + z_2 = (3+1) + (-1+2)i = 4 + i$

$z_1 - z_2 = (3-1) + (-1-2)i = 2 - 3i$

Produsul: desfacem parantezele și înlocuim $i^2 = -1$.

$z_1 z_2 = 3 + 6i - i - 2i^2 = 3 + 5i + 2 = 5 + 5i$

Câtul: amplificăm cu conjugatul numitorului, $\overline{z_2} = 1 - 2i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3 - 6i - i + 2i^2}{1+4} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

Răspuns: $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{5}$, $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{7}{5}$.

2. Puterile lui i: împărțim exponentul la 4

a) i^{2027}: $2027 = 4 \cdot 506 + 3$, deci $i^{2027} = i^3 = -i$.

b) i^{102}: $102 = 4 \cdot 25 + 2$, deci $i^{102} = i^2 = -1$.

c) $\dfrac{1}{i^{2027}} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{i}{-i \cdot i} = \dfrac{i}{1} = i$.

d) $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2027}$.

Suma are 2028 termeni = 507 grupe de câte 4 termeni consecutivi.

Fiecare grupă:
$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n(1 + i - 1 - i) = 0$.

Răspuns: $S = 0$.

3. Conjugat și modul pentru $z = (4+3i)(1-i)$

Forma algebrică: $z = 4 - 4i + 3i - 3i^2 = 7 - i$.

Conjugatul: schimbăm semnul părții imaginare: $\overline{z} = 7 + i$.

Modulul: $|z| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Control: $|z| = |4+3i| \cdot |1-i| = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Produsul cu conjugatul:
$z \cdot \overline{z} = (7-i)(7+i) = 49 + 1 = 50 = |z|^2$.

Inversul: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{7+i}{50} = \dfrac{7}{50} + \dfrac{1}{50}i$.

4. Ecuații de forma $z^2 = w$

a) $z^2 = -9$: $-9 = 9i^2 = (3i)^2$, deci $z = \pm 3i$.

b) $z^2 = 5 - 12i$. Căutăm $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$(x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 5 - 12i$, deci

$x^2 - y^2 = 5$ și $xy = -6$.

Din module: $|z|^2 = |5 - 12i|$, adică $x^2 + y^2 = 13$.

Adunând și scăzând: $x^2 = 9$, $y^2 = 4$.

Din $xy = -6 < 0$, x și y au semne contrare:

$x = 3$, $y = -2$ sau $x = -3$, $y = 2$.

Răspuns: $z \in \{3 - 2i,\ -3 + 2i\}$.

Control: $(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$.

5. Ecuația de gradul II cu $\Delta < 0$: $z^2 - 6z + 10 = 0$

$a = 1$, $b = -6$, $c = 10$: $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

$\sqrt{-\Delta} = 2$, deci $z_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$.

Răspuns: $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - i = \overline{z_1}$.

Control cu Viète: $z_1 + z_2 = 6 = -\dfrac{b}{a}$,

$z_1 z_2 = (3+i)(3-i) = 9 + 1 = 10 = \dfrac{c}{a}$.

6. Ecuații cu z și $\overline{z}$: înlocuim $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$

a) Determinați z știind că $z + \overline{z} = 4$ și $z \cdot \overline{z} = 13$.

$z + \overline{z} = 2a = 4$, deci $a = 2$.

$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = 13$, deci $b^2 = 9$, $b = \pm 3$.

Răspuns: $z \in \{2 + 3i,\ 2 - 3i\}$.

b) Rezolvați $3z - \overline{z} = 4 + 8i$.

$3(a+bi) - (a - bi) = 2a + 4bi = 4 + 8i$.

Egalăm părțile reale și cele imaginare:

$2a = 4$, $4b = 8$, deci $a = 2$, $b = 2$.

Răspuns: $z = 2 + 2i$.

7. Interpretare geometrică: $z = x + yi \iff M(x, y)$

a) $A(2+i)$, $B(-1+5i)$:

$AB = |z_A - z_B| = |3 - 4i| = \sqrt{9+16} = 5$.

Mijlocul lui AB: $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1}{2} + 3i$.

b) Mulțimea punctelor cu $|z + 1 - i| = 2$:

$|z - (-1+i)| = 2$: cercul cu centrul $(-1, 1)$ și raza 2, adică $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

c) Mulțimea punctelor cu $|z| = |z - 2|$:

M este egal depărtat de $O(0)$ și de $A(2)$, deci e pe mediatoarea lui OA.

Algebric: $x^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2 \iff 4x = 4$.

Răspuns: dreapta $x = 1$.

8. Forma trigonometrică și formula lui Moivre: $z = 1 - i\sqrt{3}$

Modulul: $r = \sqrt{1+3} = 2$.

Argumentul: $\cos t = \dfrac{1}{2}$, $\sin t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$M(1, -\sqrt{3})$ e în cadranul IV, deci $t = \dfrac{5\pi}{3}$.

$z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

a) $z^6 = 2^6(\cos 10\pi + i\sin 10\pi) = 64$.

b) $z^{10} = 2^{10}\left(\cos\dfrac{50\pi}{3} + i\sin\dfrac{50\pi}{3}\right)$.

Scoatem multiplii de 2π: $\dfrac{50\pi}{3} = 16\pi + \dfrac{2\pi}{3}$.

$z^{10} = 1024\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512 + 512\sqrt{3}\,i$.

9. Rădăcinile de ordinul 3: $z^3 = -8$

$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$, $r = 8$, $t = \pi$, $\sqrt[3]{8} = 2$:

$z_k = 2\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{3}\right)$, $k = \overline{0,2}$.

$k = 0$: $z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$k = 1$: $z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

$k = 2$: $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

La BAC: ce faci la fiecare tip de cerință

Cerința	Metoda
„Scrieți sub forma $a + bi$” cu fracție	amplifici cu conjugatul numitorului
i^n, sume de puteri ale lui i	restul împărțirii lui n la 4; grupe de câte 4 termeni au suma 0
$\|z\|$ pentru un produs sau un cât	$\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$, $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, fără să mai calculezi z
$z \in \mathbb{R}$ / z imaginar pur	aduci z la forma $a + bi$: $\operatorname{Im} z = 0$ / $\operatorname{Re} z = 0$ și $\operatorname{Im} z \neq 0$
Ecuație cu $\overline{z}$ sau $\|z\|$	înlocuiești $z = a + bi$ și egalezi părțile reale, apoi pe cele imaginare
$z^2 = w$	$(x + yi)^2 = w$, ajutat de $x^2 + y^2 = \|w\|$
$az^2 + bz + c = 0$, $\Delta < 0$	$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; verifici cu relațiile lui Viète
Mulțimea punctelor $M(z)$	$\|z - z_0\| = r$: cerc; $\|z - z_1\| = \|z - z_2\|$: mediatoarea segmentului
Puteri mari, rădăcini de ordin n	forma trigonometrică + Moivre; reduci argumentul cu multipli de 2π