Legi de compoziție

Lege, parte stabilă

$x * y =$ formulă în x și y	M = mulțimea pe care lucrez; calculez prin înlocuire, iar rezultatul trebuie să rămână în M
$x, y \in H \;\Rightarrow\; x * y \in H$	$H \subseteq M$ e *parte stabilă*: operația nu mă scoate din H
$H = (-a, a),\;\; x * y = \dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}$	arăt $a \pm x * y = \dfrac{(a \pm x)(a \pm y)}{a^2+xy} \cdot a > 0$
$H = [h, \infty)$, cu un parametru în lege	cea mai mică valoare a lui $x * y$ pe H trebuie să fie $\geq h$

Proprietățile unei legi (∀ = „pentru orice”)

comutativă	$x * y = y * x$	formula e simetrică în x, y
asociativă	$(x * y) * z = x * (y * z)$	calculez ambele părți; dacă are parametri, egalez *toți* coeficienții
neutru e	$x * e = e * x = x$	e = „nu schimbă nimic” (ca 0 la +, 1 la ·)
absorbant a	$x * a = a * x = a$	a „înghite” orice x (ca 0 la ·)
simetricul x'	$x * x' = x' * x = e$	x' „anulează” pe x (opusul, inversul)

găsesc e → rezolv $x * e = x$ → e nu depinde de x → verific și $e * x = x$

găsesc x' → rezolv $x * x' = e$ → x' în funcție de x → $x' \in M$? altfel x nu are simetric

Monoid = asociativă + element neutru · **grup** = monoid în care orice element are simetric · **abelian** = grup comutativ

Forma factorizată (cheia legilor polinomiale)

$x * y = c\,(x-h)(y-h) + h$	$c \neq 0$ și h sunt numere fixate; legea e asociativă și comutativă
$cxy + u(x+y) + w = c\big(x + \frac{u}{c}\big)\big(y + \frac{u}{c}\big) + w - \frac{u^2}{c}$	de aici $h = -\dfrac{u}{c}$; forma cere $w - \dfrac{u^2}{c} = h$, altfel legea nu e asociativă
$xy - hx - hy + \lambda$	$= (x-h)(y-h) + \lambda - h^2$; asociativă și cu neutru $\Leftrightarrow \lambda = h^2 + h$
$t = x - h$	atunci $(x * y) - h = c\,t\,t'$: legea devine înmulțire
$a = h$ absorbant	$x * h = h;\;\; x * y = h \iff x = h$ sau $y = h$
$e = h + \dfrac{1}{c}$ neutru	rezolv $c(x-h)(e-h) = x - h$
$x' = h + \dfrac{1}{c^2(x-h)}$, $x \neq h$	rezolv $x * x' = e$; h nu are simetric
$x^{*n} = c^{n-1}(x-h)^n + h$	$x^{*n} = x * \cdots * x$ (n termeni); n par ⇒ două soluții
$(\mathbb{R} \setminus \{h\}, *)$	grup abelian; $(\mathbb{R}, *)$ nu e grup
$c > 0$	$[h, \infty)$ și (h, ∞) sunt părți stabile
$M = \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{N}$	e și x' trebuie să fie în M: număr doar elementele cu $x' \in M$

Transformarea f care „îndreaptă" legea (face din $*$ o adunare sau o înmulțire)

$x+y-k$	$\to$	$f(x)=x-k$ (adunare)	$\to e=k,\ x'=2k-x,\ x^{*n}=nx-(n-1)k$
$c(x-h)(y-h)+h$	$\to$	$f(x)=c(x-h)$ (înmulțire)	$\to$ grup abelian pe $\mathbb{R}\setminus\{h\}$
$\dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}$ pe $(-a,a)$	$\to$	$f(x)=\dfrac{a+x}{a-x}$ (înmulțire)	$\to e=0$; n termeni egali cu r: $f(\text{rezultat})=f(r)^n$, apoi revin la x
$\log_b(b^x+b^y)$	$\to$	$f(x)=b^x$ (adunare)	$\to b^{x*y}=b^x+b^y$
$x^{k\ln y}$ pe $(0,\infty)$	$\to$	$f(x)=k\ln x$ (înmulțire)	$\to e=e^{1/k}$, absorbant 1, grup pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$
$\dfrac{xy}{x+y}$	$\to$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$ (adunare)	$\to \dfrac{1}{x*y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
$\sqrt[3]{x^3+y^3+k}$	$\to$	$f(x)=x^3+k$ (adunare)	$\to e=\sqrt[3]{-k}$

$f(x*y)=f(x)\top f(y)$	f e *morfism* de la $(G,*)$ la $(H,\top)$; *izomorfism* = morfism + bijectivă
$f(e)=e',\ f(x')=f(x)'$	ce moștenesc neutrul și simetricul
$f(x)=ax+b$ de la $x+y-k$ la $x+y-k'$ pe $\mathbb{Z}$	$b=k'-ak$ din termenii liberi; bijectivă pe $\mathbb{Z}\Rightarrow a=\pm1$
$f(x)=\alpha^x+b$ de la $(\mathbb{R},+)$ la $(\dots,*)$	înlocuiesc în $f(x+y)=f(x)*f(y)$ și egalez coeficienții

Metodă: calculez $f(x*y)\to$ calculez $f(x)\top f(y)\to$ le aduc la aceeași formă $\to$ bijectivitate (inversă explicită)

Extinderi: $\mathbb{Z}_n$, tabla legii, ordin, matrici

$\widehat{k}$	clasa lui k în $\mathbb{Z}_n$ = restul împărțirii lui k la n; calculez modulo n, forma factorizată merge la fel
x simetrizabil în $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$	$\gcd(x,n)=1$ (în $\mathbb{Z}_6$: doar $\widehat{1},\widehat{5}$)
ordinul lui x	cel mai mic $k\geq1$ cu $x^{*k}=e$; în $(\mathbb{Z}_n,+)$: $\operatorname{ord}\widehat{k}=\dfrac{n}{\gcd(n,k)}$

tabla legii $\to$ neutru = linia identică cu antetul · comutativă = simetrică față de diagonală · $x'=$ unde apare e · grup = fiecare element o dată pe linie și pe coloană

$A(x)=I_2+xB$, $B^2=mB$ $\to A(x)A(y)=A(x+y+mxy)$; e: $A(0)=I_2$; $\det A(x)=1+mx$; $A(x)^{-1}=A\left(\frac{-x}{1+mx}\right)$

Ce văd $\to$ ce aplic

„$x*y=(x-h)(y-h)+h$" de demonstrat	$\to$	dezvolt membrul drept
„e este neutru"	$\to$	$x*e=x$ *și* $e*x=x$
$x*x=a$, $x*x*x=a$, n termeni	$\to$	$t=x-h$, x^{*n}; n par: $\pm$
$x*(kx)$, $x*(-x)\lessgtr$	$\to$	forma factorizată, apoi semnul produsului
$1*2*\cdots*2026$	$\to$	caut absorbantul h în șir
perechi $(m,n)\in\mathbb{N}^2$	$\to$	$(m-h)(n-h)=\dfrac{k-h}{c}$: divizori cu semn, $0\in\mathbb{N}$
2^x, ln în ecuație	$\to$	$t=2^x>0$, elimin $t\leq0$
parametri a,b,λ,k	$\to$	asociativ: toți coeficienții; neutru: termenul liber $=h$
„care afirmații sunt adevărate"	$\to$	verific pe rând: neutru, absorbant, comutativ, grup
morfism, izomorfism	$\to$	cele două calcule + bijectivitate

Atenție: neutrul cere *ambele* egalități · $x*x*x=x$ are trei soluții ($t^3=t$) · x^{*n} are c^{n-1}, nu c^n · după rezolvare verific $x\in M$ · $\mathbb{R}$ nu e grup, $\mathbb{R}\setminus\{h\}$ da