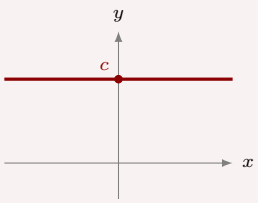
Graficele funcțiilor elementare și proprietățile lor

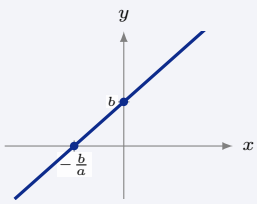
funcții elementare, trigonometrice și inverse trigonometrice

1. Funcția constantă $y = c$



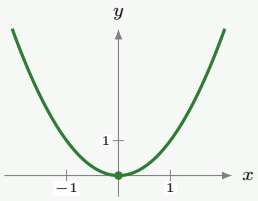
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = \{c\}$
- Monotonie: constantă
- Intersecția cu Oy: $(0, c)$

2. Funcția liniară $y = ax + b$



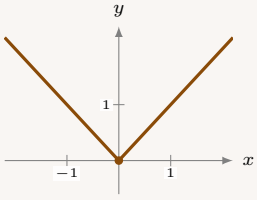
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R}$ (pentru $a \neq 0$)
- Crescătoare dacă $a > 0$, descrescătoare dacă $a < 0$
- Intersecția cu Oy: $(0, b)$
- Intersecția cu Ox: $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $a \neq 0$

3. Funcția pătratică $y = x^2$



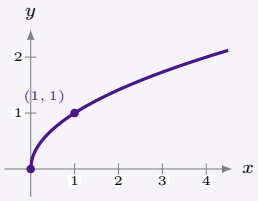
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = [0, +\infty)$
- Funcție pară
- Vârf: $V(0, 0)$
- Descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, crescătoare pe $[0, +\infty)$

4. Funcția modul $y = |x|$



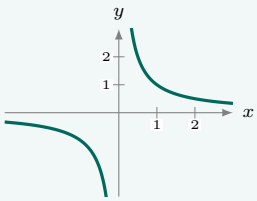
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = [0, +\infty)$
- Funcție pară
- Minim în $(0, 0)$
- Descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, crescătoare pe $[0, +\infty)$

5. Funcția radical $y = \sqrt{x}$



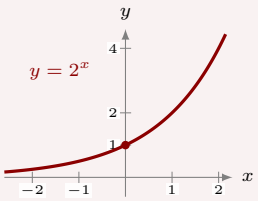
Proprietăți:
- Domeniu: $D = [0, +\infty)$
- Imagine: $\text{Im} = [0, +\infty)$
- Crescătoare pe $[0, +\infty)$
- Trece prin $(0, 0)$ și $(1, 1)$

6. Funcția reciprocă $y = \frac{1}{x}$



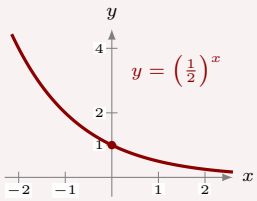
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Funcție impară
- Descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$
- Asimptote: $x = 0$ și $y = 0$

7. Funcția exponențială $y = a^x,\ a > 1$



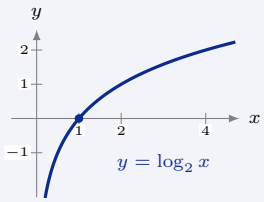
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = (0, +\infty)$
- Crescătoare
- Trece prin $(0, 1)$
- Asimptotă orizontală: $y = 0$ (spre $-\infty$)

8. Funcția exponențială $y = a^x,\ 0 < a < 1$



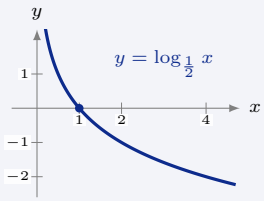
Proprietăți:
- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = (0, +\infty)$
- Descrescătoare
- Trece prin $(0, 1)$
- Asimptotă orizontală: $y = 0$ (spre $+\infty$)

9. Funcția logaritmică $y = \log_a x,\ a > 1$



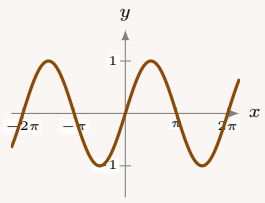
Proprietăți:
- Domeniu: $D = (0, +\infty)$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R}$
- Crescătoare
- Trece prin $(1, 0)$
- Asimptotă verticală: $x = 0$

10. Funcția logaritmică $y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



Proprietăți:
- Domeniu: $D = (0, +\infty)$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R}$
- Descrescătoare
- Trece prin $(1, 0)$
- Asimptotă verticală: $x = 0$

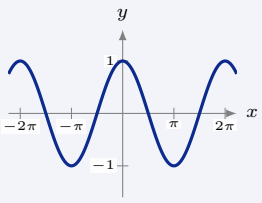
11. Funcția sinus — $y = \sin x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = [-1, 1]$
- Funcție impară: $\sin(-x) = -\sin x$
- Periodică, cu perioada 2π

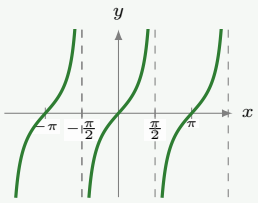
12. Funcția cosinus — $y = \cos x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = [-1, 1]$
- Funcție pară: $\cos(-x) = \cos x$
- Periodică, cu perioada 2π

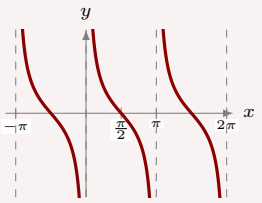
13. Funcția tangentă — $y = \text{tg}\, x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R}$
- Funcție impară
- Periodică, cu perioada π
- Crescătoare pe fiecare interval $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- Zerouri: $x = k\pi$
- Asimptote verticale: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

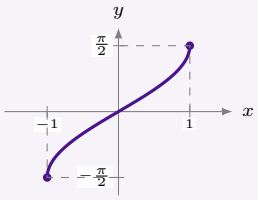
14. Funcția cotangentă — $y = \text{ctg}\, x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Imagine: $\text{Im} = \mathbb{R}$
- Funcție impară
- Periodică, cu perioada π
- Descrescătoare pe fiecare interval $(k\pi, (k+1)\pi)$
- Zerouri: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Asimptote verticale: $x = k\pi$

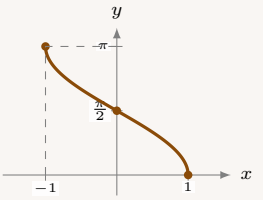
15. Funcția arcsinus — $y = \arcsin x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = [-1, 1]$
- Imagine: $\text{Im} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Crescătoare
- Funcție impară
- Trece prin $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $(0, 0)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

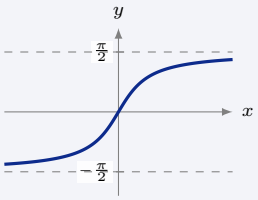
16. Funcția arccosinus — $y = \arccos x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = [-1, 1]$
- Imagine: $\text{Im} = [0, \pi]$
- Descrescătoare
- Trece prin $(-1, \pi)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $(1, 0)$

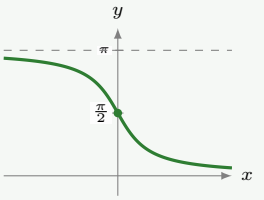
17. Funcția arctangentă — $y = \text{arctg}\, x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- Crescătoare
- Funcție impară
- Trece prin $(0, 0)$
- Asimptote orizontale: $y = -\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{\pi}{2}$

18. Funcția arccotangentă — $y = \text{arcctg}\, x$



Proprietăți:

- Domeniu: $D = \mathbb{R}$
- Imagine: $\text{Im} = (0, \pi)$
- Descrescătoare
- Trece prin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- Asimptote orizontale: $y = 0$ (spre $+\infty$) și $y = \pi$ (spre $-\infty$)

Termeni esențiali – recapitulare

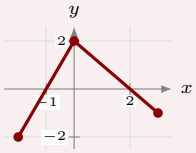
Domeniu	Mulțimea valorilor lui x pentru care funcția este definită.
Imagine	Mulțimea valorilor pe care le ia funcția.
Monotonie	Crescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$; descrescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; constantă: valorile nu se schimbă.
Funcție pară	$f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$; graficul este simetric față de axa Oy.
Funcție impară	$f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$; graficul este simetric față de origine.
Asimptotă	Dreaptă de care graficul se apropie oricât de mult când x sau y tinde la infinit.
Periodicitate	$f(x + T) = f(x)$ pentru orice $x \in D$; graficul se repetă după perioada T.

Exemple rezolvate

pas cu pas, pe tipurile de exerciții de la BAC, subiectele I–II

Exemplul 1. Citirea unui grafic

Graficul lui $f\colon [-2,3]\to\mathbb{R}$ trece prin $(-2,-2)$, $(0,2)$, $(3,-1)$.



Pasul 1. Domeniul = proiecția pe Ox: $D=[-2,3]$.

Pasul 2. Imaginea = proiecția pe Oy: $\operatorname{Im} f=[-2,2]$.

Pasul 3. Monotonia: crescătoare pe $[-2,0]$, descrescătoare pe $[0,3]$.

Pasul 4. Zerourile (graficul taie Ox): $x=-1$ și $x=2$.

Pasul 5. Semnul: $f(x)\geq 0$ pe $[-1,2]$, $f(x)<0$ pe $[-2,-1)\cup(2,3]$.

Exemplul 2. Funcția de gradul I: $f(x)=-2x+6$

Pasul 1. Intersecția cu Oy: $x=0$, $f(0)=6$, punctul $(0,6)$.

Pasul 2. Intersecția cu Ox: $-2x+6=0$, $x=3$, punctul $(3,0)$.

Pasul 3. $a=-2<0$, deci f este strict descrescătoare.

Pasul 4. Semnul: $f(x)>0$ pentru $x<3$, $f(x)<0$ pentru $x>3$ (semnul lui a la dreapta rădăcinii, semn contrar la stânga).

Pasul 5. Imaginea unui interval: f descrescătoare inversează capetele, $f([0,2])=[f(2),f(0)]=[2,6]$.

Exemplul 3. Parabola: $f(x)=x^2-6x+5$

Pasul 1. $a=1$, $b=-6$, $c=5$, $\Delta=b^2-4ac=36-20=16$.

Pasul 2. Vârful: $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)=V(3,-4)$; axa de simetrie $x=3$.

Pasul 3. Ox: $x_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}$, adică $(1,0)$ și $(5,0)$; Oy: $(0,5)$.

Pasul 4. $a>0$: descrescătoare pe $(-\infty,3]$, crescătoare pe $[3,+\infty)$, $\operatorname{Im} f=[-4,+\infty)$.

Pasul 5. Semnul: $f>0$ pe $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ (semnul lui a în afara rădăcinilor), $f<0$ pe $(1,5)$.

Exemplul 4. Imaginea pe un interval

Fie $f(x)=x^2+2x-3$; determinăm $f([-2,1])$.

Pasul 1. Abscisa vârfului: $x_V=-\frac{2}{2}=-1\in[-2,1]$.

Pasul 2. În vârf este minimul ($a>0$): $f(-1)=1-2-3=-4$.

Pasul 3. Valorile la capete: $f(-2)=4-4-3=-3$, $f(1)=1+2-3=0$.

Pasul 4. Maximul este cea mai mare valoare de la capete: 0. Deci $f([-2,1])=[-4,0]$.

Atenție: dacă x_V nu e în interval, f e monotonă pe el și contează doar capetele: $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[-3,0]$.

Exemplul 5. Comparări de numere

Pasul 1. $\sqrt{7}$ și 2,6: ambele pozitive, x^2 crescătoare pe $[0,+\infty)$; $2{,}6^2=6{,}76<7$, deci $\sqrt{7}>2{,}6$.

Pasul 2. $\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt{2}$: la puterea a 6-a, $(\sqrt[3]{3})^6=9>8=(\sqrt{2})^6$, deci $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

Pasul 3. $(0{,}3)^{1,2}$ și $(0{,}3)^{1,5}$: baza $0{,}3\in(0,1)$, exponențiala e descrescătoare; $1{,}2<1{,}5$, deci $(0{,}3)^{1,2}>(0{,}3)^{1,5}$.

Pasul 4. $\log_5 24$ și 2: scriem $2=\log_5 25$; baza $5>1$, logaritmul e crescător; $24<25$, deci $\log_5 24<2$.

Exemplul 6. Ecuație rezolvată grafic: $3^x=4-x$

Pasul 1. Notăm $f(x)=3^x$ (strict crescătoare) și $g(x)=4-x$ (strict descrescătoare).

Pasul 2. O funcție care urcă și una care coboară se întâlnesc în cel mult un punct, deci ecuația are cel mult o soluție.

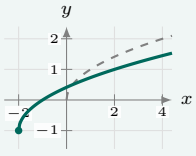
Pasul 3. Căutăm o soluție „la vedere”: $x=1$ dă $3^1=3=4-1$.

Pasul 4. $S=\{1\}$; graficele se intersectează în $(1,3)$. Pentru $x>1$, $3^x>4-x$; pentru $x<1$, $3^x<4-x$.

Exemplul 7. Transformări de grafice

De la $y=\sqrt{x}$ la $g(x)=\sqrt{x+2}-1$.

Pasul 1. $x\mapsto x+2$: translație cu 2 la *stânga*; -1: translație cu 1 în *jos*.



Pasul 2. Punctul de start $(0,0)$ ajunge în $(-2,-1)$; $D=[-2,+\infty)$.

Pasul 3. $\operatorname{Im} g=[-1,+\infty)$, g crescătoare (ca $\sqrt{x}$).

Pasul 4. Zeroul: $\sqrt{x+2}=1$, $x=-1$. Regula pentru $|f(x)|$: partea de sub Ox se reflectă deasupra axei.

Exemplul 8. Funcția inversă

Fie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

Pasul 1. Injectivă: $f(a)=f(b)\Rightarrow 2a+1=2b+1\Rightarrow a=b$.

Pasul 2. Surjectivă: pentru orice $y\in\mathbb{R}$, $x=\frac{y-1}{2}\in\mathbb{R}$ verifică $f(x)=y$.

Pasul 3. Bijectivă, deci inversabilă: $f^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$. Graficele lui f și f^{-1} sunt simetrice față de $y=x$.

Pasul 4. Contraexemplu: $h(x)=x^2+1$ nu e injectivă ($h(-1)=h(1)=2$) și nici surjectivă ($\operatorname{Im} h=[1,+\infty)\neq\mathbb{R}$).