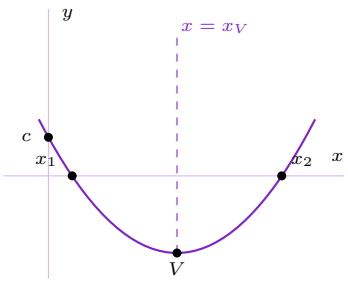
Funcția de gradul al II-lea

Funcția, graficul, discriminantul



$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	graficul = parabolă; a, b, c = coeficienții
$\Delta = b^2 - 4ac$	discriminantul: decide câte rădăcini are
$f(0) = c$	punctul de pe Oy este $(0, c)$
$f(x) = 0$	punctele de pe Ox: $(x_1, 0), (x_2, 0)$

$\Delta \to$ rădăcini

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	formula rădăcinilor
$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 rădăcini reale	parabola taie Ox în 2 puncte
$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	parabola atinge Ox (tangentă)
$\Delta < 0 \Rightarrow$ nicio rădăcină reală	parabola nu atinge Ox
$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$t = x^2 \geq 0$, rezolv în t, apoi $x = \pm\sqrt{t}$
$ax^2 + b\lvert x\rvert + c = 0$	$t = \lvert x\rvert \geq 0$, rezolv în t, apoi $x = \pm t$

La ecuațiile cu t: păstrez doar $t \geq 0$; un $t < 0$ nu dă soluții.

Vârful și extremul

$V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$	V = vârful; axa de simetrie $x = x_V = -\dfrac{b}{2a}$
$a > 0 \Rightarrow$ ramuri în sus	y_V = minim; $\operatorname{Im} f = [y_V, \infty)$; $\searrow$ pe $(-\infty, x_V]$, $\nearrow$ pe $[x_V, \infty)$
$a < 0 \Rightarrow$ ramuri în jos	y_V = maxim; $\operatorname{Im} f = (-\infty, y_V]$; $\nearrow$, apoi $\searrow$
extrem pe $[\alpha, \beta]$	compar $f(\alpha)$, $f(\beta)$ și $f(x_V)$ **doar dacă** $x_V \in [\alpha, \beta]$

Semnul funcției și inecuații

x	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$a > 0$	$+$	$-$	$+$
$a < 0$	$-$	$+$	$-$

semn a în afara rădăcinilor, semn opus între ele

$\leq, \geq \to$ rădăcinile intră; $<, > \to$ nu	capetele intervalului: [ ] sau ( )
$\Delta < 0 \Rightarrow$ semnul lui a pe tot $\mathbb{R}$	$f > 0$ pe $\mathbb{R} \iff a > 0$ și $\Delta < 0$
$\Delta = 0 \Rightarrow$ semnul lui a pe $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$	se anulează doar în x_1
$\lvert f(x)\rvert < k \iff -k < f(x) < k$	două inecuații, **intersecția** soluțiilor
$\lvert f(x)\rvert > k \iff f(x) < -k$ sau $f(x) > k$	două inecuații, **reuniunea** soluțiilor
$\dfrac{f(x)}{x - d} \leq 0, > 0, \ldots$	tabel cu rădăcinile lui f și d; d nu intră niciodată
sistem de inecuații	rezolv fiecare, apoi $S = S_1 \cap S_2$

Relațiile lui Viète

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$	suma și produsul rădăcinilor, fără să le calculez
$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{S}{P}$
$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$	$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$

Parabola și dreapta, determinarea funcției

$f(x) = mx + n$	ecuația absciselor punctelor comune; apoi Δ
$\Delta > 0$ / $\Delta = 0$ / $\Delta < 0$	2 puncte comune / **tangentă** / niciunul
$f(x) = m$ (dreaptă orizontală)	aceeași schemă; tangentă când $m = y_V$
trece prin 3 puncte	înlocuiesc fiecare punct în $ax^2 + bx + c$: sistem în a, b, c
vârf (h, k) și un punct	$f(x) = a(x - h)^2 + k$, din punct aflu a
rădăcini r_1, r_2 și un punct	$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, din punct aflu a

Cu parametrul m

2 soluții reale distincte	$a \neq 0$ și $\Delta > 0$ (inecuație în m)
$f_m(x) > 0$ pe $\mathbb{R}$	$a > 0$ și $\Delta < 0$; dacă a depinde de m, verific separat $a = 0$
vârful pe Ox / pe $y = x$ / minim $= k$	$y_V = 0$ / $y_V = x_V$ / $y_V = k$
relație între x_1, x_2	scriu cu S și P, rezolv în m, **apoi verific** $\Delta > 0$

Ce văd → ce aplic

„valoarea minimă / maximă", „valorile lui f"	→	vârful V, semnul lui a
profit, aria unui dreptunghi, produs sau sumă de pătrate cu $x + y = s$	→	scriu expresia ca $f(x)$, extremul = vârful
„puncte pe Ox", „rezolvați $f(x) = 0$"	→	Δ și rădăcinile
„$x_1^2 + x_2^2$", „$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$"	→	Viète, fără rădăcini
„rezolvați inecuația"	→	rădăcinile, apoi tabelul de semn

Atenție: $\Delta < 0$ nu înseamnă „fără soluție" la inecuație (poate fi $\mathbb{R}$) · extremul pe interval nu e mereu în vârf · la parametru verific $\Delta > 0$ la final