Formule utile: puteri, radicali, logaritmi

Puteri $(a, b > 0;\ m, n \in \mathbb{R})$

$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^n = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

Radicali de ordinul 2

$\sqrt{a^2} = |a| \qquad a \in \mathbb{R}$

$(\sqrt{a})^2 = a \qquad a \geq 0$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a, b \geq 0$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \qquad a, b \geq 0$

$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} \qquad b \geq 0$

Radicali compuși $(C = \sqrt{A^2 - B})$:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

Radicali de ordinul n

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \qquad b \neq 0$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad n$ par

$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad n$ impar

$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a} \qquad a \in \mathbb{R}$

n par: $a, b \geq 0$; n impar: $a, b \in \mathbb{R}$

Raționalizarea numitorului

$\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

$\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}$

$\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}$

$\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$

Formule de calcul prescurtat

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Logaritmi – definiție

$\log_a b = x \iff a^x = b$

Condiții: $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a b} = b$

$\lg x = \log_{10} x, \qquad \ln x = \log_e x$

Proprietățile logaritmilor $(a, c > 0,\ a, c \neq 1;\ x, y > 0)$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x \qquad n \neq 0$

$\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$

$\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ schimbarea bazei

$\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} \qquad x \neq 1$

$\log_a x \cdot \log_x y = \log_a y \qquad x \neq 1$

$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x| \qquad x \neq 0$

Ecuații și inecuații exponențiale și logaritmice

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$

$a^{f(x)} = b \iff f(x) = \log_a b \qquad b > 0$

$a > 1:\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$

$0 < a < 1:\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x) \qquad f(x), g(x) > 0$

$\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$

$a > 1:\ \log_a f(x) < \log_a g(x) \iff 0 < f(x) < g(x)$

$0 < a < 1:\ \log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) > g(x) > 0$

Puteri utile

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
5^n	5	25	125	625	3125					
7^n	7	49	343	2401						

Semnul logaritmului

$a > 1$:

$\log_a x > 0 \iff x > 1$

$\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$

$0 < a < 1$:

$\log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$

$\log_a x < 0 \iff x > 1$

Puteri, radicali, logaritmi – exemple rezolvate

1. Radicali: raționalizare și radical compus

a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$: amplificăm cu conjugatul $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

$$\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{5+\sqrt{24}}$: $A=5$, $B=24$, $C=\sqrt{25-24}=1$.

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Verificare: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6}$.

2. Logaritmi: proprietăți, schimbarea bazei, comparare

a) $\log_2 12 + \log_2 \dfrac{2}{3} = \log_2\left(12\cdot\dfrac{2}{3}\right) = \log_2 8 = 3$.

b) $\lg 25 + \lg 4 = \lg 100 = 2$.

c) $\log_3 5 \cdot \log_5 27 = \log_3 27 = 3$ (baza din mijloc se „simplifică”).

d) Comparăm $a=\log_3 10$ și $b=\log_2 3$, prin numărul 2:

$10>9$ și baza $3>1 \Rightarrow \log_3 10 > \log_3 9 = 2$;

$3<4$ și baza $2>1 \Rightarrow \log_2 3 < \log_2 4 = 2$.

Răspuns: $b<2<a$, deci $\log_2 3 < \log_3 10$.

3. Ecuații exponențiale

a) Aceeași bază: $3^{x+1} = 27^{x-1}$.

$27 = 3^3 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{3x-3} \Rightarrow x+1 = 3x-3 \Rightarrow x=2$.

Verificare: $3^3 = 27 = 27^1$.

b) Substituție: $4^x - 6\cdot 2^x + 8 = 0$.

$4^x = (2^x)^2$; notăm $t = 2^x > 0$: $t^2 - 6t + 8 = 0$, $t \in \{2, 4\}$.

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$; $\quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$. $\quad S = \{1, 2\}$.

4. Ecuație logaritmică: întâi condițiile de existență

$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$.

CE: $x+1>0$ și $x-1>0 \Rightarrow x \in (1,\infty)$.

Rezolvare: $\log_2\big((x+1)(x-1)\big) = 3 \Rightarrow$ $x^2-1 = 2^3 = 8$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

Verificăm CE: $x=3 \in (1,\infty)$, se acceptă; $x=-3 \notin (1,\infty)$, se respinge ($\log_2(-2)$ nu există).

Răspuns: $S=\{3\}$.

5. Inecuații: contează dacă baza e mai mare sau mai mică decât 1

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} > 4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

Baza $\frac{1}{2}<1$, deci sensul *se schimbă*: $x-1<-2$, $x<-1$.

Răspuns: $x \in (-\infty, -1)$.

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq -1$. **CE:** $x>2$.

$-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$; baza $\frac{1}{3}<1$, sensul se schimbă: $x-2 \leq 3$, $x \leq 5$.

Cu CE: $x \in (2, 5]$.

6. Ecuație irațională: condiții, ridicare la pătrat, verificare

$\sqrt{x+3} = x+1$.

Condiții: $x+3 \geq 0$ și $x+1 \geq 0$ (un radical nu e negativ) $\Rightarrow x \geq -1$.

Ridicăm la pătrat: $x+3 = x^2+2x+1 \Rightarrow$ $x^2+x-2=0$, $x \in \{1, -2\}$.

Verificare: $x=1$: $\sqrt{4} = 2 = 1+1$, se acceptă.

$x=-2$: $\sqrt{1} = 1 \neq -1$, se respinge (apare doar din ridicarea la pătrat).

Răspuns: $S=\{1\}$.