Determinanți – proprietăți

Determinantul de ordinul 2 și 3 (L_i = linia i, C_j = coloana j)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ — diagonala principală minus cea secundară

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$ — Sarrus: 3 produse cu + (diagonala principală și „înfășurările" ei), 3 cu − (diagonala secundară și ale ei)

Proprietăți (ce fac liniile fac și coloanele)

$\det A^T = \det A$ — transpusa: liniile devin coloane

$L_i \leftrightarrow L_j \Rightarrow$ det schimbă semnul — schimb două linii

det = 0 dacă — o linie (coloană) de 0, sau două linii egale ori proporționale; spre asta merg operațiile de mai jos

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$ $\det(kA) = k^n \det A$ — factorul comun iese de pe o linie; n = ordinul lui A

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ c & d \end{vmatrix}$$ — o linie scrisă ca sumă desparte determinantul în doi

$L_i \to L_i + kL_j$ $(j \neq i)$ nu schimbă det — „$L_2 - 2L_1$" = înlocuiesc L_2 cu $L_2 - 2L_1$; așa fac zerouri

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = a\,e\,i$$ — sub (sau deasupra) diagonalei numai 0: produsul diagonalei

$\det A = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij}\, d_{ij}$ — dezvolt după linia i; d_{ij} = determinantul fără linia i și coloana j; semnele $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$; aleg linia cu cele mai multe zerouri

$A^T = -A$, ordin impar $\Rightarrow \det A = 0$ — zerouri pe diagonală, $a_{ji} = -a_{ij}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$ — Vandermonde: toate diferențele „mai la dreapta minus mai la stânga"

$V_4 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ — același model, patru litere

Drumul: zerouri întâi

caut o legătură între linii / coloane → operația ($L_i \pm kL_j$, $C_i + C_j$), scrisă la fiecare pas → *linie de zero* (det = 0) sau *triunghiular* sau *dezvoltare*

Ce văd → ce aplic

„arătați că $\det = 0$”	→	o combinație de linii (coloane) dă linie de zero; o scriu
$\sin^2 + \cos^2 = 1$, sume care se anulează pe linie	→	combinația face coloana de zero
suma pe fiecare linie (coloană) e aceeași	→	$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, factor comun, apoi $L_i - L_1$
prima linie (coloană) numai de 1	→	$L_i - L_1$ (sau $C_j - C_1$) până la triunghiular
puteri $1, a, a^2, \ldots$ pe coloană	→	Vandermonde
coloane de forma $A+B,\ B+C,\ C+A$	→	liniaritate: descompun, coloanele egale dau 0
„calculați”, rezultat ca produs	→	zerouri, factori comuni pe parcurs, apoi Vandermonde sau 2×2
ecuație $\Delta(x) = 0$	→	aduc Δ la produs, apoi fiecare factor $= 0$
inegalitate $\Delta \geq 0$	→	aduc Δ la pătrat sau la factori de semn cunoscut

Atenție: $L_2 \to 2L_2 - L_1$ înmulțește det cu 2 · $\det(3A) = 3^n \det A$, nu $3 \det A$ · „$\det = 0$” se justifică prin operația scrisă · la dezvoltare elementul a_{32} intră cu semnul $-$