Derivate și aplicații

Derivata într-un punct și tangenta

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	dacă limita există și e finită, f e *derivabilă* în x_0; $f'(x_0)$ = panta tangentei
$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$	tangenta în x_0: calculez *două* numere, $f(x_0)$ și $f'(x_0)$
tangentă paralelă cu $y = mx + n$ $\iff f'(x_0) = m$	aceeași pantă
f derivabilă în $x_0 \Rightarrow f$ continuă în x_0	reciproca e falsă ($\lvert x \rvert$ în 0)

Tabelul derivatelor (u = o funcție, u' = derivata ei)

$c' = 0$	$(x^n)' = n\,x^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Reguli de calcul

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\quad (c\,u)' = c\,u'$	derivez termen cu termen; constanta iese în față
$(u\,v)' = u'v + u\,v'$	produs: nu $u'v'$!
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$	cât: $v \neq 0$, numărătorul are semn minus
$\big(f(u)\big)' = f'(u) \cdot u'$	compusă: derivez „din afară spre interior”, apoi înmulțesc cu derivata interiorului
$(u^n)' = n\,u^{n-1}u'$, $(e^u)' = e^u u'$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	cazuri frecvente
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	cazuri frecvente

Monotonie, extreme, convexitate

$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$	$f' < 0 \Rightarrow f \searrow$	crește / scade pe interval
$f'' > 0 \Rightarrow f$ convexă	$f'' < 0 \Rightarrow f$ concavă	$f'' = (f')'$, derivata derivatei

calculez f' $\rightarrow$ rezolv $f'(x) = 0$ pe domeniu $\rightarrow$ tabel de semn $\rightarrow$ monotonie

f' *schimbă semnul* în x_0 $\rightarrow$ x_0 punct de extrem $\quad (+ \to - \text{ maxim}, - \to + \text{ minim})$

f'' *schimbă semnul* în x_0 $\rightarrow$ x_0 punct de inflexiune

Derivabilitate în x_0 (funcții pe ramuri, cu modul)

f derivabilă în $x_0 \iff f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ (f'_s, f'_d = derivata la stânga / la dreapta)

continuă în x_0? $\rightarrow$ derivata pe fiecare ramură, în x_0 $\rightarrow$ le compar

cu modul: $|u| = \pm u$ după semnul lui u lângă x_0 $\rightarrow$ derivatele laterale

parametri a, b: continuitate + derivate laterale egale $\rightarrow$ sistem

Regula lui l'Hospital (pentru $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$)

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ — dacă ultima limită există; se poate repeta

$0 \cdot \infty \rightarrow f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$ — îl aduc la $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$

Asimptote (graficul se apropie de o dreaptă)

verticală $x = a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	se caută la capetele finite ale domeniului, cu limite laterale
orizontală $y = \ell$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$	separat spre $+\infty$ și spre $-\infty$
oblică $y = mx + n$	$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)$	m, n finite; dacă există orizontală, nu există oblică

Ce văd $\rightarrow$ ce aplic

produs / cât de funcții	$\rightarrow$	regula produsului / câtului
funcție în interiorul alteia (e^{3x}, $\ln(x^2+1)$)	$\rightarrow$	compusă: înmulțesc cu derivata interiorului
„tangenta în x_0”, „paralelă cu o dreaptă”	$\rightarrow$	$f(x_0)$, $f'(x_0)$, ecuația tangentei
„intervale de monotonie”, „puncte de extrem”	$\rightarrow$	$f' = 0$, tabel de semn
„convexă”, „inflexiune”	$\rightarrow$	f'' și semnul ei
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\rightarrow$	este $f'(x_0)$
funcție cu două ramuri sau cu modul	$\rightarrow$	derivate laterale
$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$	$\rightarrow$	l'Hospital
„asimptote”	$\rightarrow$	verticale, orizontale, oblice, pe rând

Atenție: panta e $f'(x_0)$, nu $f(x_0)$ · $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, nu e^{3x} · $f'(x_0) = 0$ nu ajunge pentru extrem (x^3) sau inflexiune (x^4) · l'Hospital doar pe $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$