Criterii importante pentru șiruri

cu exemple, când se pot aplica și șiruri definite prin recurență (clasa a XI-a)

Partea I. Fișa de teorie

1. Criteriul radicalului

Enunț: Fie $a_n > 0$. Dacă există $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, atunci:

- dacă $q < 1$, rezultă $a_n \to 0$;
- dacă $q > 1$, rezultă $a_n \to +\infty$;
- dacă $q = 1$, criteriul nu decide: $a_n = n \to +\infty$ și $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ au amândouă $q = 1$.

Când se poate aplica: pentru șiruri cu termeni pozitivi, mai ales când a_n conține puteri de forma $(\cdots)^n$ sau expresii la care rădăcina de ordin n simplifică repede formula.

Exemplu: $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Atunci $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, deci $a_n \to 0$.

Legătura cu raportul: dacă $a_n > 0$ și $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to q$, atunci și $\sqrt[n]{a_n} \to q$ (vezi R5).

2. Criteriul raportului

Enunț: Fie $a_n > 0$. Dacă există $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, atunci:

- dacă $q < 1$, rezultă $a_n \to 0$;
- dacă $q > 1$, rezultă $a_n \to +\infty$;
- dacă $q = 1$, criteriul nu decide: $a_n = n \to +\infty$ și $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ au amândouă $q = 1$.

Când se poate aplica: pentru șiruri cu termeni pozitivi, în special când apar produse, factoriale sau puteri și raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se simplifică ușor.

Exemplu: $a_n = \dfrac{n}{2^n}$. Avem $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2} < 1$, deci $a_n \to 0$.

3. Criteriul cleștelui (de încadrare)

Enunț: Dacă $a_n \le b_n \le c_n$ pentru n suficient de mare și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Când se poate aplica: atunci când șirul căutat poate fi încadrat între două șiruri mai simple, cu aceeași limită.

Exemplu: $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$. Cum ambele margini tind la 0, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

4. Teorema lui Cesàro–Stolz

Enunț: Dacă (b_n) este strict crescător și $b_n \to +\infty$, iar există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l, \quad \text{unde } l \in \mathbb{R} \text{ sau } l = \pm\infty, \qquad \text{atunci} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Când se poate aplica: la rapoarte de șiruri care dau forme nedeterminate de tip $\dfrac{\infty}{\infty}$, mai ales când diferențele $a_{n+1} - a_n$ și $b_{n+1} - b_n$ sunt mai ușor de calculat decât raportul inițial.

Exemplu: $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_n = n^2$. Atunci $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \dfrac{n+1}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{1}{2}$.

5. Teorema lui Weierstrass

Enunț: Orice șir monoton și mărginit este convergent. Mai precis:

- dacă (a_n) este crescător și mărginit superior, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- dacă (a_n) este descrescător și mărginit inferior, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Când se poate aplica: atunci când poți arăta că șirul este monoton (crescător sau descrescător) și are o mărginire potrivită (superioară sau inferioară).

Exemple de monotonie și mărginire:

- $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ – șir crescător, mărginit superior de 1, deci convergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = 1$.
- $b_n = \dfrac{1}{n}$ – șir descrescător, mărginit inferior de 0, deci convergent; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf b_n = 0$.
- $c_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ – șir crescător, mărginit superior de 2, deci convergent; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sup c_n = 2$.

Cum recunoști criteriul

Dacă în șir apare...	**...încearcă**
o expresie la puterea n: $\left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right)^n$, $\dfrac{(n+1)^n}{3^n n^n}$	criteriul radicalului
$n!$, puteri a^n, produse: $\dfrac{3^n}{n!}$, $\dfrac{n!}{n^n}$	criteriul raportului
$\sqrt[n]{\cdots}$ cu $n!$ înăuntru: $\sqrt[n]{n!}$, $\sqrt[n]{n}$	raport → radical (R5)
$\sin n$, $\cos n$, $(-1)^n$ sau o sumă de n termeni care se pot compara între ei	criteriul cleștelui
o sumă (sau un șir) împărțită la un șir care tinde la $+\infty$: $\dfrac{1^2+\cdots+n^2}{n^3}$, $\dfrac{\ln n}{n}$	Cesàro–Stolz
un șir recurent $a_{n+1} = f(a_n)$	Weierstrass, apoi $l = f(l)$ (Partea a III-a)
o recurență liniară $a_{n+1} = q\,a_n + r$ sau de ordinul 2	formula termenului general (Partea a III-a)

De reținut

- criteriul radicalului și criteriul raportului cer, în mod uzual, termeni pozitivi;
- dacă obții $q = 1$, aceste două criterii nu sunt concludente (exemplu: $a_n = n$ și $a_n = \frac{1}{n}$);
- criteriul cleștelui este util când poți încadra șirul;
- Cesàro–Stolz este foarte util pentru formele $\dfrac{\infty}{\infty}$; limita l obținută poate fi un număr real sau $\pm\infty$;
- teorema lui Weierstrass este metoda standard pentru șiruri monotone și mărginite;
- la un șir recurent, ecuația $l = f(l)$ dă doar valorile posibile ale limitei; convergența se demonstrează separat.

Partea a II-a. Exerciții rezolvate

Criteriul radicalului

R1. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Rezolvare. $a_n>0$ și $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{n}{2n+1}\to\dfrac{1}{2}<1$, deci $a_n\to 0$.

R2. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right)^n$.

Rezolvare. $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{3n+1}{2n+5}\to\dfrac{3}{2}>1$, deci $a_n\to+\infty$.

Criteriul raportului

R3. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

Rezolvare. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{3^n}=\dfrac{3}{n+1}\to 0<1$, deci $a_n\to 0$.

R4. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$.

Rezolvare. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\to\dfrac{1}{3}<1$, deci $a_n\to 0$.

Legătura raport → radical

R5. Dacă $a_n>0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ (rezultat admis). Folosind acest rezultat, calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Rezolvare. a) Luăm $a_n=n$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}\to 1$, deci $\sqrt[n]{n}\to 1$.

b) $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. Luăm $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$.

Atenție: reciproca nu este adevărată. Pentru $a_n=2+(-1)^n$ avem $1\le a_n\le 3$, deci $\sqrt[n]{a_n}\to 1$ (clește), dar $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ia alternativ valorile 3 și $\frac{1}{3}$, deci nu are limită.

Criteriul cleștelui

R6. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$.

Rezolvare. Din $-1\le\cos n\le 1$ rezultă $-\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{\cos n}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$. Ambele margini tind la 0, deci limita este 0.

R7. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

Rezolvare. Suma are n termeni; cel mai mic este $\dfrac{n}{n^2+n}$, cel mai mare este $\dfrac{n}{n^2+1}$. Deci

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le a_n\le\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ambele margini tind la 1, deci $a_n\to 1$.

Teorema lui Cesàro–Stolz

R8. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$.
Rezolvare. Luăm $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ și $b_n = n$ (strict crescător, $b_n \to +\infty$). Atunci

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1} \to 0,$$

deci limita cerută este 0.

R9. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.
Rezolvare. Luăm $a_n = 1^2+2^2+\cdots+n^2$, $b_n = n^3$. Atunci

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} \to \frac{1}{3},$$

deci limita cerută este $\dfrac{1}{3}$.

Teorema lui Weierstrass

R10. Arătați că șirul $a_n = \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ este convergent.
Rezolvare. Monotonie: $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci șirul este strict crescător.
Mărginire: pentru $k \geq 2$ avem $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$. Adunând pentru $k = 2,\ldots,n$ (sumă telescopică):

$$a_n < 1+\left(1-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

Șirul este crescător și mărginit superior, deci convergent (teorema lui Weierstrass).

R11. Fie $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \geq 1$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita.
Rezolvare. Mărginire: arătăm prin inducție că $0 < a_n < 2$. Avem $a_1 = 1$, iar dacă $0 < a_n < 2$, atunci $0 < a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} = 2$.
Monotonie: $a_{n+1} > a_n \iff 2+a_n > a_n^2 \iff (a_n-2)(a_n+1) < 0$, adevărat pentru $0 < a_n < 2$. Deci șirul este strict crescător.
Fiind crescător și mărginit superior, șirul este convergent; fie l limita sa. Trecând la limită în relația de recurență: $l = \sqrt{2+l}$, adică $l^2-l-2 = 0$, cu soluțiile $l = 2$ și $l = -1$. Cum $a_n > 0$, rezultă $l = 2$.

Partea a III-a. Șiruri definite prin recurență

Un șir este definit *prin recurență* când se dau primul termen (sau primii termeni) și o regulă care calculează fiecare termen din cei dinaintea lui. De exemplu, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ (R11).

6. Recurențe de forma $a_{n+1} = f(a_n)$

Pașii standard:

1. *Mărginire, prin inducție:* arăți că $m \leq a_n \leq M$ pentru a_1, apoi că din $m \leq a_n \leq M$ rezultă $m \leq a_{n+1} \leq M$.
2. *Monotonie:* studiezi semnul lui $a_{n+1}-a_n$ (sau compari $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ cu 1, dacă $a_n > 0$).
3. *Weierstrass:* șirul este monoton și mărginit, deci convergent; notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
4. *Limita:* cum și $a_{n+1} \to l$, trecem la limită în recurență (f continuă) și obținem $l = f(l)$. Dintre

rădăcini o păstrezi pe cea compatibilă cu pașii 1–2 (de exemplu: $a_n > 0 \Rightarrow l \geq 0$; șir crescător $\Rightarrow l \geq a_1$; șir descrescător $\Rightarrow l \leq a_1$).

Capcană: ecuația $l = f(l)$ arată doar ce valoare *ar putea* avea limita, *dacă* există. Pentru $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2$, ecuația $l = l^2$ are soluțiile 0 și 1, dar $a_n = 2^{2^{n-1}} \to +\infty$. De aceea convergența (pașii 1–3) se demonstrează *înainte* de a rezolva $l = f(l)$.

7. Recurența liniară de ordinul 1: $a_{n+1} = q\,a_n + r \quad (q \neq 0)$

- $q = 1$: progresie aritmetică de rație r, $a_n = a_1 + (n-1)r$;
- $r = 0$: progresie geometrică de rație q, $a_n = a_1\,q^{n-1}$;
- $q \neq 1$: *punctul fix* este $l = \dfrac{r}{1-q}$ (din $l = q\,l + r$). Notăm $b_n = a_n - l$. Scăzând $l = q\,l + r$ din recurență, obținem $b_{n+1} = q\,b_n$, deci (b_n) este progresie geometrică de rație q și

$$a_n = l + (a_1 - l)\,q^{n-1}.$$

Limita (pentru $a_1 \neq l$; dacă $a_1 = l$, șirul este constant):

- $|q| < 1$: $a_n \to l$;
- $q > 1$: $a_n \to +\infty$ dacă $a_1 > l$, $a_n \to -\infty$ dacă $a_1 < l$;
- $q \leq -1$: șirul nu are limită (termenii alternează în jurul lui l).

8. Extindere: recurența liniară de ordinul 2: $a_{n+2} = p\,a_{n+1} + q\,a_n$

Se rezolvă *ecuația caracteristică* $t^2 = p\,t + q$, adică $t^2 - p\,t - q = 0$:

- rădăcini reale distincte $t_1 \neq t_2$: $a_n = \alpha\,t_1^n + \beta\,t_2^n$;
- rădăcină dublă $t_1 = t_2 = t$: $a_n = (\alpha + \beta n)\,t^n$.

Constantele α, β se află din primii doi termeni ($n = 1$ și $n = 2$). Exemplu: șirul lui Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ are $t^2 = t + 1$, $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ și

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

9. Sume și produse scrise recurent

$S_1 = x_1$, $S_{n+1} = S_n + x_{n+1}$ înseamnă $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Diferența $S_{n+1} - S_n = x_{n+1}$ este exact ce cere Cesàro–Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{b_{n+1} - b_n}.$$

Analog, pentru $P_1 = x_1 > 0$, $P_{n+1} = P_n \cdot x_{n+1}$ ($x_n > 0$) avem $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = x_{n+1}$, deci se aplică direct criteriul raportului.

Exerciții rezolvate

R12. Fie $a_1 = 3$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{2a_n}$, $n \geq 1$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita.

Rezolvare. Mărginire: arătăm prin inducție că $a_n > 2$. Avem $a_1 = 3 > 2$, iar dacă $a_n > 2$, atunci

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{2a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} > 0.$$

Monotonie: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{4-a_n^2}{2a_n}<0$, pentru că $a_n>2$. Deci șirul este strict descrescător.
Fiind descrescător și mărginit inferior (de 2), șirul este convergent; fie l limita sa. Din $a_n>2$ rezultă $l\geq 2$. Trecând la limită: $l=\dfrac{l^2+4}{2l}$, adică $l^2=4$, cu soluțiile $l=2$ și $l=-2$. Cum $l\geq 2$, rezultă $l=2$.

R13. Determinați termenul general și limita șirului:
a) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\,a_n+3$; b) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$.

Rezolvare. a) Punctul fix: $l=\frac{1}{2}\,l+3\Rightarrow l=6$. Cu $b_n=a_n-6$ avem $b_{n+1}=\frac{1}{2}\,b_n$ și $b_1=-5$, deci $b_n=-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ și

$$a_n=6-\frac{5}{2^{n-1}}\to 6\qquad (|q|=\tfrac{1}{2}<1).$$

Verificare: $a_2=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}=6-\frac{5}{2}$.
b) Punctul fix: $l=2l+1\Rightarrow l=-1$. Cu $b_n=a_n+1$ avem $b_{n+1}=2b_n$, $b_1=2$, deci $b_n=2^n$ și $a_n=2^n-1\to+\infty$. Aici punctul fix -1 *nu* este limita șirului (vezi capcana de la 6).

R14. *(extindere)* Fie $a_1=1$, $a_2=5$ și $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $n\geq 1$. Determinați a_n și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Rezolvare. Ecuația caracteristică $t^2-5t+6=0$ are rădăcinile $t_1=2$, $t_2=3$, deci $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot 3^n$. Din

$$n=1:\ 2\alpha+3\beta=1,\qquad n=2:\ 4\alpha+9\beta=5$$

obținem $\beta=1$, $\alpha=-1$, deci $a_n=3^n-2^n$ (verificare: $a_3=5\cdot 5-6\cdot 1=19=27-8$). Apoi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}=\frac{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to 3.$$

R15. Fie $S_1=1$ și $S_{n+1}=S_n+\sqrt{n+1}$, $n\geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n\sqrt{n}}$.

Rezolvare. $S_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$, iar $b_n=n\sqrt{n}$ este strict crescător, cu $b_n\to+\infty$. Aplicăm Cesàro–Stolz. Amplificând cu conjugata,

$$b_{n+1}-b_n=(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}=\frac{(n+1)^3-n^3}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}=\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}},$$

deci

$$\frac{S_{n+1}-S_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{3n^2+3n+1}=\frac{(n+1)^2+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1}\to\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Limita cerută este $\dfrac{2}{3}$.