LuminaMath clasa a VI-a – grile

Probleme de la edițiile LuminaMath 2025 (ediția a XXIX-a, varianta B), 2024 (etapa scrisă și etapa online) și 2016, grupate pe capitole, rezolvate pas cu pas, și exerciții asemănătoare

Cum lucrezi

- La concurs ai **40 de grile**, cu variantele **A**–**E**, **o singură** variantă corectă, și **120 de minute**.
- Punctaj: $20 + 2 \cdot (\text{corecte}) - 0{,}5 \cdot (\text{greșite})$. Problemele **fără răspuns** nu se punctează și nu se depunctează, deci **nu ghici la întâmplare**: o variantă pusă la noroc costă mai mult decât aduce.
- Toate problemele valorează la fel, așa că le faci **întâi pe cele ușoare** și te întorci la cele grele cu timpul rămas.
- Fiecare capitol are întâi **enunțurile**, apoi, pe pagină nouă, **rezolvările**. Rezolvă pe caiet, apoi verifică.
- Numărul problemei spune de unde vine: „Problema 2025-20“ e problema 20 din broșura 2025, „2024S-10“ e problema 10 de la etapa scrisă 2024, „2024O-7“ de la etapa online 2024, „2016-5“ din broșura 2016. După fiecare capitol urmează **exerciții asemănătoare**: câte 3 pentru fiecare problemă (2025-20.1, 2025-20.2, 2025-20.3). Fă-le după ce ai înțeles rezolvarea.
- Tabelul cu toate răspunsurile e la final.

Capitole

1. Puteri și divizibilitate **2**

1A. Puteri și divizibilitate – exerciții asemănătoare **6**

2. Unghiuri **16**

2A. Unghiuri – exerciții asemănătoare **23**

Răspunsuri **36**

1. Puteri și divizibilitate

Enunțuri

Problema 2025-20. Cel mai mare număr natural n, care verifică inegalitatea $(12^{n+1} - 12^n) : (6^{n+1} + 5 \cdot 6^n) \leq 32$, este:

A 5 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 1

Problema 2025-28. Fie numerele $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ și $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$, cu n număr natural. Stabiliți relația care este adevărată:

A $a > b$ **B** $a = b$ **C** $a : b = 2$ **D** $a < b$ **E** $a - b = 0$

Problema 2024S-14. Dacă $x = 2^{2024}$ și $y =$ suma divizorilor proprii ai lui x, atunci $x - y$ este egal cu:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 2^{2024} **E** 2^{2023}

Problema 2024S-18. Fie numărul $N = 33^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 11^n - 66^{n+1} : 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Care afirmație nu este corectă?

A $N \vdots 33$ **B** $N \vdots 3$ **C** $N \vdots 353$ **D** $N \vdots 535$ **E** $N \vdots 99$

Problema 2024S-19. Dacă $n = 32^5 \cdot 2^{36} - 12^{30} : 9^{15} - 4^{25} \cdot 8^3$, atunci ultima cifră a lui n este:

A 4 **B** 1 **C** 6 **D** 8 **E** 2

Problema 2024S-22. Dacă $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{2x+1}{3x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ și $a \in A$, atunci suma $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2024}$ este egală cu:

A 2025 **B** 2 **C** 0 **D** 1 **E** alt răspuns

Problema 2024S-36. Se consideră numerele prime a și b astfel încât $a + a^2 + a^3 + a^4 + b^a = 2024$. Câte perechi de numere (a, b) verifică egalitatea?

A 7 **B** 8 **C** 14 **D** 5 **E** 0

Problema 2024S-37. Se consideră numerele de forma $A = 2^a + 5^b$, unde a și b sunt cifre. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a numărului A. Suma tuturor $u(A)$ este egală cu:

A 475 **B** 500 **C** 530 **D** 515 **E** 555

Problema 2024S-38. Se consideră numerele naturale n și k pentru care există egalitatea $2^n + 2 \cdot 2^n + \cdots + 2024 \cdot 2^n = (2k+1) \cdot 1012$. Suma numerelor n și k este:

A 2025 **B** 0 **C** 2024 **D** 1013 **E** 1012

Problema 2024O-2. Diferența dintre jumătatea lui 8^{48} și sfertul lui 4^{71} se divide cu:

A 140 **B** 10 **C** 28 **D** 0 **E** 280

Problema 2024O-9. Valoarea lui x pentru care $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2024}+x=2^{2025}$ este:

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 2024 **E** 2025

Problema 2016-7. Care este valoarea numărului natural n din ecuația $8^n+8^{n+1}=9\cdot 2^{2016}$?

A 670 **B** 671 **C** 672 **D** 673 **E** 674

Problema 2010-8. Restul împărțirii numărului $m=3^{n+3}+2^{n+5}\cdot 31^n$ la 59 este:

A 2 **B** 3 **C** 31 **D** 0 **E** alt răspuns

Problema 2010-9. Restul împărțirii numărului $a=3\cdot 8^{2010}$ la numărul $b=5\cdot 8^{2008}$ este:

A 2 **B** 2^{2009} **C** 8^{2009} **D** 2^{6025} **E** 8^{2008}

Problema 2010-12. Calculând $1-\frac{2}{3^{2010}}-\frac{2}{3^{2009}}-\frac{2}{3^{2008}}-\cdots-\frac{2}{3^2}-\frac{2}{3^1}$ obțineți:

A 3^{2010} **B** 3^{2009} **C** $\frac{1}{3^{2009}}$

D $\frac{1}{3^{2010}}$ **E** 2^{2010}

Rezolvări – capitolul 1

Problema 2025-20. Dăm factor comun: $12^{n+1} - 12^n = 12^n \cdot (12-1) = 11 \cdot 12^n$ și $6^{n+1} + 5 \cdot 6^n = 6^n \cdot (6+5) = 11 \cdot 6^n$. Câtul este $\dfrac{11 \cdot 12^n}{11 \cdot 6^n} = \dfrac{12^n}{6^n} = 2^n$. Inegalitatea devine $2^n \le 32 = 2^5$, deci $n \le 5$. Cel mai mare n natural este 5.

Capcană: $2^n < 32$ (strict) ar da $n = 4$; aici semnul este „$\le$“, deci $n = 5$ convine.

Răspuns: A

Problema 2025-28. Descompunem în factori primi: $25^{n+1} = 5^{2n+2}$ și $15^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}$. Atunci

$$a = 2^3 \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{2n+2}, \qquad b = 7 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} \cdot 5^{n+1} = 7 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{2n+3}.$$

Calculăm raportul, simplificând puterile egale:

$$\frac{a}{b} = \frac{8 \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{2n+2}}{7 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{2n+3}} = \frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35} < 1.$$

Cum a și b sunt numere naturale nenule și $a : b < 1$, rezultă $a < b$ pentru orice n.

Variantele $a = b$ și $a - b = 0$ spun același lucru; $a : b = 2$ ar cere ca raportul să fie 2, dar el este $\frac{24}{35}$.

Răspuns: D

Problema 2024S-14. Divizorii lui $x = 2^{2024}$ sunt $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2024}$; cei proprii (diferiți de 1 și de x) sunt $2, 2^2, \ldots, 2^{2023}$. Fie $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2023}$. Atunci $2S = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2024}$, deci $2S - S = 2^{2024} - 1$, adică $S = 2^{2024} - 1$. Suma divizorilor proprii este $y = S - 1 = 2^{2024} - 2$, iar $x - y = 2^{2024} - (2^{2024} - 2) = 2$.

Convenția folosită: divizori proprii = divizorii diferiți de 1 și de număr. Dacă s-ar număra și 1, ar ieși $y = 2^{2024} - 1$ și $x - y = 1$ (varianta B).

Răspuns: C

Problema 2024S-18. Împărțirea se face înaintea scăderii: $66^{n+1} : 2^{n+1} = (66:2)^{n+1} = 33^{n+1}$. Atunci $N = 33^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 11^n - 33^{n+1}$. Cum $3^{n+1} \cdot 11^n = 3 \cdot 33^n$, dăm factor comun 33^n: $N = 33^n \cdot (33^2 + 3 - 33) = 33^n \cdot 1059 = 33^n \cdot 3 \cdot 353$. Pentru $n \ge 1$, N se divide cu 33, 3, 353 și cu $99 = 9 \cdot 11$ (avem $3^{n+1} \ge 9$ și 11^n), dar nu cu $535 = 5 \cdot 107$, căci N nu are factorii 5 și 107. **Răspuns: D**

Problema 2024S-19. Aducem la puteri ale lui 2: $32^5 \cdot 2^{36} = 2^{25} \cdot 2^{36} = 2^{61}$; $12^{30} : 9^{15} = (2^2 \cdot 3)^{30} : 3^{30} = 2^{60}$; $4^{25} \cdot 8^3 = 2^{50} \cdot 2^9 = 2^{59}$. Deci $n = 2^{61} - 2^{60} - 2^{59} = 2^{59} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{59}$. Ultimele cifre ale puterilor lui 2 se repetă din 4 în 4: $2, 4, 8, 6$. Cum $59 = 4 \cdot 14 + 3$, ultima cifră a lui 2^{59} este a treia din ciclu, adică 8.

Capcană: ciclul începe cu 2^1, nu cu 2^0; restul 3 al împărțirii lui 59 la 4 înseamnă a treia cifră din ciclu.

Răspuns: D

Problema 2024S-22. Pentru $x = 0$: $\dfrac{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$. Pentru $x \ge 1$: $0 < 2x + 1 < 3x + 1$, deci fracția este între 0 și 1 și nu poate fi număr natural. Așadar $A = \{0\}$ și $a = 0$. Atunci $S = 1 + 0 + 0^2 + \cdots + 0^{2024} = 1$.

Capcană: $a = 1$ ar da 2025, dar $1 \notin A$ (fracția ar fi $\frac{3}{4}$).

Răspuns: D

Problema 2024S-36. Cum $a + a^2 + a^3 + a^4 < 2024$, avem $a \le 5$ (pentru $a = 7$ suma este 2800). Cazuri: $a = 2$: $30 + b^2 = 2024$, $b^2 = 1994$, care nu e pătrat perfect ($44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$). $a = 3$: $120 + b^3 = 2024$, $b^3 = 1904$, care nu e cub ($12^3 = 1728$, $13^3 = 2197$). $a = 5$: $780 + b^5 = 2024$, $b^5 = 1244$, care nu e puterea a cincea ($4^5 = 1024$, $5^5 = 3125$). Nu există nicio pereche.

Răspunsul 0: toate cazurile posibile pentru a au fost verificate.

Răspuns: E

Problema 2024S-37. Ultima cifră a lui 5^b este 1 pentru $b = 0$ și 5 pentru $b \ge 1$. Ultimele cifre ale lui 2^a, pentru $a = 0, 1, \ldots, 9$, sunt $1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2$. Pentru $b = 0$: cifrele lui A sunt $2, 3, 5, 9, 7, 3, 5, 9, 7, 3$, cu suma 53. Pentru fiecare dintre cele 9 valori $b \ge 1$: cifrele sunt $6, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7$, cu suma 53. În total: $53 + 9 \cdot 53 = 10 \cdot 53 = 530$.

Atenție: $a = 0$ și $b = 0$ sunt cifre, iar $2^0 = 5^0 = 1$.

Răspuns: C

Problema 2024S-38. Dăm factor comun 2^n: $2^n \cdot (1+2+\cdots+2024) = 2^n \cdot \dfrac{2024 \cdot 2025}{2} = 2^n \cdot 1012 \cdot 2025$. Egalitatea devine $2^n \cdot 1012 \cdot 2025 = (2k+1) \cdot 1012$, deci $2^n \cdot 2025 = 2k+1$. Partea dreaptă este impară, deci 2^n este impar, adică $n = 0$. Atunci $2k+1 = 2025$, $k = 1012$ și $n + k = 1012$.

Capcană: nu se cere k singur, ci $n + k$; 2025 este valoarea lui $2k + 1$.

Răspuns: E

Problema 2024O-2. $8^{48} = 2^{144}$, deci jumătatea sa este 2^{143}. $4^{71} = 2^{142}$, deci sfertul său este $2^{142} : 4 = 2^{140}$. Diferența este $2^{143} - 2^{140} = 2^{140} \cdot (2^3 - 1) = 2^{140} \cdot 7$. Aceasta se divide cu $28 = 4 \cdot 7$. Nu se divide cu 5, deci nici cu 140, 10 sau 280; iar împărțirea la 0 nu are sens.

Capcană: $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$ și 280 conțin factorul 5, absent din $2^{140} \cdot 7$.

Răspuns: C

Problema 2024O-9. Fie $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2024}$. Atunci $2S = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2025}$, deci $2S - S = 2^{2025} - 1$, adică $S = 2^{2025} - 1$. Egalitatea devine $2^{2025} - 1 + x = 2^{2025}$, deci $x = 1$.

Suma $1 + 2 + \cdots + 2^{2024}$ este cu 1 mai mică decât 2^{2025}.

Răspuns: B

Problema 2016-7. Factor comun: $8^n + 8^{n+1} = 8^n \cdot (1 + 8) = 9 \cdot 8^n$. Ecuația devine $9 \cdot 8^n = 9 \cdot 2^{2016}$, deci $8^n = 2^{2016}$, adică $2^{3n} = 2^{2016}$. Rezultă $3n = 2016$ și $n = 672$. **Răspuns: C**

Problema 2010-8. $2^{n+5} \cdot 31^n = 32 \cdot 2^n \cdot 31^n = 32 \cdot 62^n$, iar $62 = 59 + 3$, deci 62^n are același rest ca 3^n la împărțirea cu 59. Atunci m are același rest ca $27 \cdot 3^n + 32 \cdot 3^n = 59 \cdot 3^n$, adică multiplu de 59. Restul este 0.

Verificare: pentru $n = 0$, $m = 27 + 32 = 59$.

Răspuns: D

Problema 2010-9. $a = 3 \cdot 8^2 \cdot 8^{2008} = 192 \cdot 8^{2008}$ și $b = 5 \cdot 8^{2008}$. Cum $192 = 38 \cdot 5 + 2$, avem $a = 38 \cdot b + 2 \cdot 8^{2008}$, iar $2 \cdot 8^{2008} < 5 \cdot 8^{2008} = b$. Deci restul este $2 \cdot 8^{2008} = 2 \cdot 2^{6024} = 2^{6025}$.

Restul trebuie să fie mai mic decât împărțitorul b.

Răspuns: D

Problema 2010-12. Fie $T = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^{2010}}$. Atunci $3T = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^{2009}}$, deci $3T - T = 1 - \dfrac{1}{3^{2010}}$, adică $2T = 1 - \dfrac{1}{3^{2010}}$. Expresia este $1 - 2T = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{3^{2010}}\right) = \dfrac{1}{3^{2010}}$.

Suma $\frac{2}{3^{2010}} + \cdots + \frac{2}{3^1}$ este $1 - \frac{1}{3^{2010}}$: aproape 1, dar cu $\frac{1}{3^{2010}}$ mai puțin.

Răspuns: D

1A. Puteri și divizibilitate – exerciții asemănătoare

Enunțuri

Asemănătoare cu problema 2025-20

Problema 2025-20.1. Cel mai mare număr natural n care verifică inegalitatea $(9^{n+1}-9^n):(3^{n+1}+3^n)\leq 162$ este:

A 3 **B** 5 **C** 4 **D** 81 **E** 2

Problema 2025-20.2. Cel mai mare număr natural n care verifică inegalitatea $(15^{n+1}-15^n):(5^{n+1}-3\cdot 5^n)\leq 1701$ este:

A 4 **B** 6 **C** 243 **D** 3 **E** 5

Problema 2025-20.3. Câte numere naturale n verifică inegalitatea $(10^{n+1}-10^n):(5^{n+1}+4\cdot 5^n)\leq 64$?

A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 64 **E** 5

Asemănătoare cu problema 2025-28

Problema 2025-28.1. Fie $a=3\cdot 2^{n+2}\cdot 5^{n+1}$ și $b=5\cdot 10^{n+1}$, cu n număr natural. Relația adevărată este:

A $a<b$ **B** $a=b$ **C** $a>b$ **D** $a:b=2$ **E** $a-b=1$

Problema 2025-28.2. Fie $a=5\cdot 6^{n+1}\cdot 5^{n+2}$ și $b=4\cdot 3^{n+1}\cdot 10^{n+2}$, cu n număr natural. Relația adevărată este:

A $a>b$ **B** $a=b$ **C** $a:b=8$ **D** $b:a=2$ **E** $a<b$

Problema 2025-28.3. Fie $a=9\cdot 2^{n+3}\cdot 5^{n+1}$ și $b=6^2\cdot 10^{n+1}$, cu n număr natural. Relația adevărată este:

A $a=b$ **B** $a>b$ **C** $a:b=10$ **D** $a<b$ **E** $a-b=1$

Asemănătoare cu problema 2024S-14

Problema 2024S-14.1. Dacă $x=2^{10}$ și $y=$ suma divizorilor proprii ai lui x, atunci y este egal cu:

A 1023 **B** 1024 **C** 2046 **D** 1022 **E** 10

Problema 2024S-14.2. Dacă $x=2^{2023}$ și $y=$ suma divizorilor proprii ai lui x, atunci $y+2$ este egal cu:

A 2^{2024} **B** 2^{2022} **C** 2^{2023} **D** 2023 **E** $2^{2023}-1$

Problema 2024S-14.3. Dacă $x=2^{2024}$ și $y=$ suma tuturor divizorilor lui x (inclusiv 1 și x), atunci $y-x$ este egal cu:

A $2^{2024}-1$ **B** 2^{2024} **C** 2^{2025} **D** $2^{2023}-1$ **E** 1

Asemănătoare cu problema 2024S-18

Problema 2024S-18.1. Fie numărul $N = 6^{n+2} + 6^{n+1} + 6^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Care afirmație nu este corectă?

A $N \vdots 43$ **B** $N \vdots 215$ **C** $N \vdots 86$ **D** $N \vdots 258$ **E** $N \vdots 6$

Problema 2024S-18.2. Fie numărul $N = 42^{n+2} : 2^{n+2} + 3^{n+1} \cdot 7^n - 21^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Care afirmație nu este corectă?

A $N \vdots 94$ **B** $N \vdots 21$ **C** $N \vdots 47$ **D** $N \vdots 141$ **E** $N \vdots 189$

Problema 2024S-18.3. Fie numărul $N = 10^{n+1} + 4 \cdot 10^n$, $n \in \mathbb{N}$. Care dintre afirmațiile următoare este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$?

A $N \vdots 28$ **B** $N \vdots 20$ **C** $N \vdots 70$ **D** $N \vdots 35$ **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2024S-19

Problema 2024S-19.1. Dacă $n = 16^6 \cdot 2^{15} - 4^{19}$, atunci ultima cifră a lui n este:

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 2 **E** 0

Problema 2024S-19.2. Dacă $n = 27^4 \cdot 3^{15} - 9^{13}$, atunci ultima cifră a lui n este:

A 7 **B** 9 **C** 8 **D** 2 **E** 1

Problema 2024S-19.3. Dacă $n = 8^{10} \cdot 2^3 - 4^{16} \cdot 2$, atunci ultima cifră a lui n este:

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 0 **E** 8

Asemănătoare cu problema 2024S-22

Problema 2024S-22.1. Dacă $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \frac{x+2}{3x} \in \mathbb{N} \right\}$ și $a \in A$, atunci suma $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{100}$ este egală cu:

A 100 **B** 101 **C** 1 **D** 102 **E** alt răspuns

Problema 2024S-22.2. Dacă $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \frac{x+6}{3x} \in \mathbb{N} \right\}$ și $a \in A$, atunci suma $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{10}$ este egală cu:

A 177146 **B** 88573 **C** 177147 **D** 29524 **E** 59048

Problema 2024S-22.3. Dacă $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{x+2}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ și $a \in A$, atunci suma $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{10}$ este egală cu:

A 1 **B** 11 **C** 12 **D** 0 **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2024S-36

Problema 2024S-36.1. Numerele prime a și b verifică egalitatea $a + a^2 + a^3 + b^a = 63$. Atunci $a + b$ este egal cu:

A 9 **B** 14 **C** 5 **D** 10 **E** 12

Problema 2024S-36.2. Numerele prime a și b verifică egalitatea $a + a^2 + a^3 + a^4 + b^a = 245$. Atunci $a \cdot b$ este egal cu:

A 15 **B** 8 **C** 125 **D** 30 **E** 3

Problema 2024S-36.3. Se consideră numerele prime a și b astfel încât $a + a^2 + a^3 + b^a = 2025$. Câte perechi (a, b) verifică egalitatea?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2024S-37

Problema 2024S-37.1. Se consideră numerele $A = 2^a + 5^b$, unde $a, b \in \{1, 2, 3\}$. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a numărului A. Suma tuturor $u(A)$ este egală cu:

A 87 **B** 19 **C** 57 **D** 63 **E** 51

Problema 2024S-37.2. Se consideră numerele de forma $A = 3^a + 5^b$, unde a și b sunt cifre. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a numărului A. Suma tuturor $u(A)$ este egală cu:

A 520 **B** 486 **C** 540 **D** 500 **E** 560

Problema 2024S-37.3. Se consideră numerele $A = 4^a + 6^b$, unde a și b sunt cifre nenule. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a numărului A. Suma tuturor $u(A)$ este egală cu:

A 36 **B** 72 **C** 80 **D** 90 **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2024S-38

Problema 2024S-38.1. Se consideră numerele naturale n și k pentru care $2^n + 2 \cdot 2^n + \cdots + 100 \cdot 2^n = (2k + 1) \cdot 5050$. Suma numerelor n și k este:

A 1 **B** 100 **C** 0 **D** 5050 **E** 2525

Problema 2024S-38.2. Se consideră numerele naturale n și k pentru care $2^n + 2 \cdot 2^n + \cdots + 40 \cdot 2^n = (2k + 1) \cdot 164$. Suma numerelor n și k este:

A 5 **B** 3 **C** 0 **D** 164 **E** 2

Problema 2024S-38.3. Câte perechi (n, k) de numere naturale verifică egalitatea $2^n + 2 \cdot 2^n + \cdots + 7 \cdot 2^n = (2k + 1) \cdot 14$?

A o pereche **B** două perechi

C șapte perechi **D** o infinitate de perechi

E nicio pereche

Asemănătoare cu problema 2024O-2

Problema 2024O-2.1. Diferența dintre sfertul lui 2^{25} și jumătatea lui 4^{10} se divide cu:

A 30 **B** 45 **C** 21 **D** 35 **E** 63

Problema 2024O-2.2. Diferența dintre a treia parte a lui 9^{20} și a noua parte a lui 3^{37} se divide cu:

A 160 **B** 120 **C** 14 **D** 100 **E** 75

Problema 2024O-2.3. Diferența dintre jumătatea lui 8^{10} și sfertul lui 2^{31} este egală cu:

A 0 **B** 2^{29} **C** 1 **D** 2^{30} **E** 2^{31}

Asemănătoare cu problema 2024O-9

Problema 2024O-9.1. Valoarea lui x pentru care $1+2+2^2+\cdots+2^9+x=2^{11}$ este:

A 1024 **B** 1 **C** 2047 **D** 1025 **E** 2048

Problema 2024O-9.2. Valoarea lui x pentru care $1+2+2^2+\cdots+2^{2023}+x=2^{2025}$ este:

A 2^{2024} **B** 1 **C** $2^{2025}-1$ **D** $2^{2024}+1$ **E** $2^{2023}+1$

Problema 2024O-9.3. Pentru $n\in\mathbb{N}$, valoarea lui x din egalitatea $1+2+2^2+\cdots+2^n+x=2^{n+3}$ este:

A $2^{n+2}+1$ **B** $6\cdot 2^n+1$ **C** $2^{n+1}+1$ **D** $2^{n+3}-1$ **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2016-7

Problema 2016-7.1. Care este valoarea numărului natural n din ecuația $4^n+4^{n+1}=5\cdot 2^{2018}$?

A 1008 **B** 1010 **C** 1009 **D** 2018 **E** 1011

Problema 2016-7.2. Care este valoarea numărului natural n din ecuația $9^n+9^{n+1}=10\cdot 3^{2022}$?

A 674 **B** 1011 **C** 1010 **D** 1012 **E** 2022

Problema 2016-7.3. Care este valoarea numărului natural n din ecuația $8^n+8^{n+1}=9\cdot 2^{2017}$?

A 671 **B** 672 **C** 673 **D** 2017 **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2010-8

Problema 2010-8.1. Restul împărțirii numărului $m=2^{n+1}+3\cdot 7^n$ la 5 este:

A 1 **B** 0 **C** 2 **D** 3 **E** 4

Problema 2010-8.2. Restul împărțirii numărului $m=4^{n+2}+3\cdot 6^n\cdot 7^n+7$ la 19 este:

A 0 **B** 3 **C** 16 **D** 7 **E** 4

Problema 2010-8.3. Restul împărțirii numărului $m=3^{n+2}+2^{n+2}\cdot 8^n+4$ la 13 este:

A 0 **B** 1 **C** 3 **D** 9 **E** alt răspuns

Asemănătoare cu problema 2010-9

Problema 2010-9.1. Restul împărțirii numărului $a = 7 \cdot 2^{12}$ la numărul $b = 3 \cdot 2^{10}$ este:

A 1 **B** 2^{10} **C** 2^{12} **D** 2 **E** $3 \cdot 2^{10}$

Problema 2010-9.2. Restul împărțirii numărului $a = 11 \cdot 3^{2025}$ la numărul $b = 4 \cdot 3^{2023}$ este:

A 3 **B** 3^{2025} **C** 3^{2024} **D** $2 \cdot 3^{2023}$ **E** $4 \cdot 3^{2023}$

Problema 2010-9.3. Restul împărțirii numărului $a = 6 \cdot 2^{2010}$ la numărul $b = 3 \cdot 2^{2009}$ este:

A 1 **B** 0 **C** 2^{2009} **D** 3 **E** 2^{2010}

Asemănătoare cu problema 2010-12

Problema 2010-12.1. Calculând $1 - \frac{2}{3^{20}} - \frac{2}{3^{19}} - \cdots - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3}$ obțineți:

A 3^{20} **B** $\frac{1}{3^{19}}$ **C** $\frac{1}{3^{21}}$

D 2^{20} **E** $\frac{1}{3^{20}}$

Problema 2010-12.2. Calculând $1 - \frac{4}{5^{15}} - \frac{4}{5^{14}} - \cdots - \frac{4}{5^2} - \frac{4}{5}$ obțineți:

A $\frac{1}{5^{15}}$ **B** $\frac{1}{5^{14}}$ **C** 5^{15}

D $\frac{4}{5^{15}}$ **E** $\frac{1}{5^{16}}$

Problema 2010-12.3. Calculând $2 - \frac{2}{3^{10}} - \frac{2}{3^9} - \cdots - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3}$ obțineți:

A $\frac{3^{10}+1}{3^{10}}$ **B** 1 **C** $\frac{1}{3^{10}}$

D 3^{10} **E** alt răspuns

Rezolvări – capitolul 1A

Problema 2025-20.1. $9^{n+1}-9^n=9^n\cdot 8$ și $3^{n+1}+3^n=3^n\cdot 4$. Câtul este $\dfrac{8\cdot 9^n}{4\cdot 3^n}=2\cdot 3^n$ (căci $9^n:3^n=3^n$). Inegalitatea devine $2\cdot 3^n\le 162$, adică $3^n\le 81=3^4$, deci $n\le 4$. Cel mai mare este $n=4$.

Capcană: $3^n<81$ (strict) ar da $n=3$; 81 este valoarea lui 3^n, nu a lui n.

Răspuns: C

Problema 2025-20.2. $15^{n+1}-15^n=14\cdot 15^n$ și $5^{n+1}-3\cdot 5^n=5^n\cdot(5-3)=2\cdot 5^n$. Câtul este $\dfrac{14\cdot 15^n}{2\cdot 5^n}=7\cdot 3^n$. Inegalitatea: $7\cdot 3^n\le 1701$, deci $3^n\le 243=3^5$ și $n\le 5$. Cel mai mare este $n=5$.

Cu „<“ ar fi ieșit $n=4$; 243 este valoarea lui 3^n.

Răspuns: E

Problema 2025-20.3. $10^{n+1}-10^n=9\cdot 10^n$ și $5^{n+1}+4\cdot 5^n=5^n\cdot 9$. Câtul este $\dfrac{9\cdot 10^n}{9\cdot 5^n}=2^n$. Din $2^n\le 64=2^6$ obținem $n\le 6$, deci $n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$: sunt 7 numere.

Se cere câte numere, nu cel mai mare: numărul 0 se numără și el (cel mai mare este 6, dar sunt 7 numere).

Răspuns: B

Problema 2025-28.1. $a=3\cdot 2^{n+2}\cdot 5^{n+1}=3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2^n\cdot 5^n=60\cdot 10^n$ și $b=5\cdot 10^{n+1}=50\cdot 10^n$. Deci $a>b$ (iar $a-b=10\cdot 10^n$, nu 1, și $a:b=\frac{6}{5}$, nu 2). **Răspuns: C**

Problema 2025-28.2. Descompunem: $a=5\cdot 2^{n+1}\cdot 3^{n+1}\cdot 5^{n+2}$ și $b=2^2\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{n+2}\cdot 5^{n+2}=2^{n+4}\cdot 3^{n+1}\cdot 5^{n+2}$. Simplificând puterile egale:

$$\frac{a}{b}=\frac{5\cdot 2^{n+1}}{2^{n+4}}=\frac{5}{8}<1.$$

Deci $a<b$. Atenție: $b:a=\frac{8}{5}$, nu 2. **Răspuns: E**

Problema 2025-28.3. $a=9\cdot 2^{n+3}\cdot 5^{n+1}=9\cdot 2^3\cdot 5\cdot 10^n=360\cdot 10^n$ și $b=6^2\cdot 10^{n+1}=36\cdot 10\cdot 10^n=360\cdot 10^n$. Deci $a=b$ pentru orice n.

Caz în care relația e egalitate: nu se potrivește nici $a>b$, nici $a<b$; $a:b=1$, nu 10.

Răspuns: A

Problema 2024S-14.1. Divizorii proprii ai lui 2^{10} sunt $2,2^2,\dots,2^9$. Cu $S=1+2+\cdots+2^9$ avem $2S-S=2^{10}-1$, deci $S=1023$, iar $y=S-1=1022$.

Dacă s-ar număra și 1, ar ieși 1023; 1024 este chiar x.

Răspuns: D

Problema 2024S-14.2. Divizorii proprii sunt $2,2^2,\dots,2^{2022}$. Din $S=1+2+\cdots+2^{2022}$ rezultă $2S-S=2^{2023}-1$, deci $y=S-1=2^{2023}-2$ și $y+2=2^{2023}$.

$2^{2023}-1$ ar fi $y+1$, adică suma care include și divizorul 1.

Răspuns: C

Problema 2024S-14.3. Toți divizorii sunt $1,2,\dots,2^{2024}$, deci $y=1+2+\cdots+2^{2024}=2^{2025}-1$ (din $2y-y$). Atunci $y-x=2^{2025}-1-2^{2024}=2^{2024}\cdot(2-1)-1=2^{2024}-1$.

Atenție: aici y include toți divizorii, deci și 1 și x.

Răspuns: A

Problema 2024S-18.1. Factor comun 6^n: $N=6^n\cdot(36+6+1)=43\cdot 6^n$. Pentru $n\ge 1$, N se divide cu 43, cu 6, cu $86=2\cdot 43$ (căci $2\mid 6^n$) și cu $258=6\cdot 43$. Nu se divide cu $215=5\cdot 43$, deoarece 6^n nu are factorul 5.

Se cere afirmația care NU este corectă.

Răspuns: B

Problema 2024S-18.2. $42^{n+2}:2^{n+2}=21^{n+2}$ și $3^{n+1}\cdot 7^n=3\cdot 21^n$. Deci $N=21^{n+2}+3\cdot 21^n-21^{n+1}=21^n\cdot(441+3-21)=21^n\cdot 423=3^{n+2}\cdot 7^n\cdot 47$. Pentru $n\ge 1$ se divide cu 21, 47, $141=3\cdot 47$ și $189=27\cdot 7$. Dar N este impar (produs de numere impare), deci nu se divide cu $94=2\cdot 47$. **Răspuns: A**

Problema 2024S-18.3. $N = 10^n \cdot (10+4) = 14 \cdot 10^n$. Pentru $n = 0$ obținem $N = 14$, număr care nu se divide cu 28, 20, 70 sau 35. Cum afirmația trebuie să fie adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv 0), niciuna dintre primele patru nu convine.

Aici $n \in \mathbb{N}$ include 0; pentru $n \geq 2$, de exemplu, N se divide cu 20 și cu 70, dar nu pentru orice n.

Răspuns: E

Problema 2024S-19.1. $16^6 \cdot 2^{15} = 2^{24} \cdot 2^{15} = 2^{39}$ și $4^{19} = 2^{38}$, deci $n = 2^{39} - 2^{38} = 2^{38} \cdot (2-1) = 2^{38}$. Ciclul ultimelor cifre ale puterilor lui 2 este $2, 4, 8, 6$; $38 = 4 \cdot 9 + 2$, deci ultima cifră este a doua din ciclu: 4.

Ultima cifră depinde de restul lui 38 la 4 (adică 2), nu de 38 însuși.

Răspuns: A

Problema 2024S-19.2. $27^4 \cdot 3^{15} = 3^{12} \cdot 3^{15} = 3^{27}$ și $9^{13} = 3^{26}$, deci $n = 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} \cdot (3-1) = 2 \cdot 3^{26}$. Puterile lui 3 se termină ciclic în $3, 9, 7, 1$. Cum $26 = 4 \cdot 6 + 2$, 3^{26} se termină în 9, iar $2 \cdot 9 = 18$: ultima cifră a lui n este 8.

7 este ultima cifră a lui 3^{27}, iar 9 a lui 3^{26}: nu se uită factorul 2.

Răspuns: C

Problema 2024S-19.3. $8^{10} \cdot 2^3 = 2^{30} \cdot 2^3 = 2^{33}$ și $4^{16} \cdot 2 = 2^{32} \cdot 2 = 2^{33}$. Deci $n = 2^{33} - 2^{33} = 0$, iar ultima cifră este 0.

Nu se aplică ciclul $2, 4, 8, 6$: cele două puteri sunt egale și se anulează.

Răspuns: D

Problema 2024S-22.1. Pentru $x = 1$: $\dfrac{3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$. Pentru $x \geq 2$: $0 < x + 2 < 3x$, deci fracția este între 0 și 1. Așadar $A = \{1\}$, $a = 1$ și $S = 1 + 1 + \cdots + 1$ cu 101 termeni, adică 101.

Capcană: sunt 101 termeni ($a^0, a^1, \ldots, a^{100}$), nu 100.

Răspuns: B

Problema 2024S-22.2. Fracția este număr natural doar dacă $3x \leq x + 6$, adică $x \leq 3$. Verificăm: $x = 1$: $\frac{7}{3}$ nu; $x = 2$: $\frac{8}{6}$ nu; $x = 3$: $\frac{9}{9} = 1$ da. Deci $a = 3$. Din $3S = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{11}$ avem $3S - S = 3^{11} - 1$, adică $2S = 177146$ și $S = 88573$.

$177146 = 3^{11} - 1$ este $2S$ (nu S), 177147 este chiar 3^{11}, iar 29524 este suma doar până la 3^9.

Răspuns: B

Problema 2024S-22.3. Pentru $x = 0$: $\dfrac{2}{1} = 2 \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 1$: $\dfrac{3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$. Pentru $x \geq 2$: $0 < x + 2 < 2x + 1$, deci fracția nu este naturală. Așadar $A = \{0, 1\}$, iar a poate fi 0 sau 1. Dacă $a = 0$, $S = 1$; dacă $a = 1$, $S = 11$. Valoarea lui S nu este unic determinată.

Aici mulțimea A are două elemente, deci niciuna dintre valorile 1 și 11 nu este răspunsul pentru orice $a \in A$: se alege "alt răspuns".

Răspuns: E

Problema 2024S-36.1. Cum $a + a^2 + a^3 < 63$, avem $a \leq 3$ (pentru $a = 5$ suma este 155). $a = 2$: $14 + b^2 = 63$, deci $b^2 = 49$ și $b = 7$, număr prim. $a = 3$: $39 + b^3 = 63$, $b^3 = 24$, nu e cub. Unica soluție este $(a, b) = (2, 7)$, deci $a + b = 9$.

14 este produsul $a \cdot b$, nu suma.

Răspuns: A

Problema 2024S-36.2. Cum $a + a^2 + a^3 + a^4 < 245$, avem $a \leq 3$ (pentru $a = 5$ suma este 780). $a = 2$: $30 + b^2 = 245$, $b^2 = 215$, nu e pătrat. $a = 3$: $120 + b^3 = 245$, $b^3 = 125$, deci $b = 5$, număr prim. Unica soluție este $(3, 5)$ și $a \cdot b = 15$.

8 este suma $a + b$; 125 este b^3.

Răspuns: A

Problema 2024S-36.3. $a=2$: $14+b^2=2025$, $b^2=2011$, nu e pătrat perfect ($44^2=1936$, $45^2=2025$). Dacă a este impar, $a+a^2+a^3$ este impar, deci b^a trebuie să fie par, adică $b=2$ și $2^a=2025-(a+a^2+a^3)$. Cum $a+a^2+a^3<2025$ dă $a\le 11$ ($a=13$ ar da 2379), verificăm $a\in\{3,5,7,11\}$: 2^a ia valorile $8,32,128,2048$, iar $2025-(a+a^2+a^3)$ ia valorile $1986,1870,1626,562$. Nu coincide niciuna. Nu există nicio pereche; numărul perechilor (0) nu apare printre variantele $1,2,3,4$.

Răspuns degenerat: 0 perechi, deci "alt răspuns".

Răspuns: E

Problema 2024S-37.1. Cum $b\ge 1$, 5^b se termină în 5. Valorile 2^a sunt $2,4,8$, deci $u(A)$ este $7,9,3$ ($2+5$, $4+5$, $8+5=13$). Pentru fiecare dintre cele 3 valori ale lui b suma este $7+9+3=19$, deci în total $3\cdot 19=57$.

87 apare dacă se adună 13 în loc de ultima cifră 3; 19 este suma pentru un singur b.

Răspuns: C

Problema 2024S-37.2. Ultimele cifre ale lui 3^a, pentru $a=0,\dots,9$, sunt $1,3,9,7,1,3,9,7,1,3$. Pentru $b=0$ ($5^0=1$) cifrele lui A sunt $2,4,0,8,2,4,0,8,2,4$, cu suma 34. Pentru fiecare $b\ge 1$ (5^b se termină în 5) cifrele sunt $6,8,4,2,6,8,4,2,6,8$, cu suma 54. Total: $34+9\cdot 54=34+486=520$.

486 este contribuția cazurilor $b\ge 1$; cazul $b=0$ trebuie adăugat separat (34).

Răspuns: A

Problema 2024S-37.3. 6^b se termină mereu în 6. 4^a se termină în 4 pentru a impar și în 6 pentru a par. Pentru a impar ($a\in\{1,3,5,7,9\}$, 5 valori): $4+6=10$, deci $u(A)=0$. Pentru a par ($a\in\{2,4,6,8\}$, 4 valori): $6+6=12$, deci $u(A)=2$. Pentru un b fixat suma este $5\cdot 0+4\cdot 2=8$; cum b are 9 valori, totalul este $9\cdot 8=72$.

Ciclul lui 4 are lungime 2, nu 4.

Răspuns: B

Problema 2024S-38.1. $2^n\cdot(1+2+\cdots+100)=2^n\cdot\dfrac{100\cdot 101}{2}=2^n\cdot 5050$. Egalitatea devine $2^n\cdot 5050=(2k+1)\cdot 5050$, deci $2^n=2k+1$ este impar, adică $n=0$ și $k=0$. Suma este 0.

Soluția $n=k=0$ este singura; 0 este număr natural.

Răspuns: C

Problema 2024S-38.2. $2^n\cdot(1+2+\cdots+40)=2^n\cdot 820=2^n\cdot 5\cdot 164$. Egalitatea devine $2^n\cdot 5=2k+1$. Partea dreaptă este impară, deci $n=0$, iar $2k+1=5$ dă $k=2$. Suma este $n+k=2$.

5 este valoarea lui $2k+1$, nu a lui k.

Răspuns: E

Problema 2024S-38.3. $2^n\cdot(1+2+\cdots+7)=2^n\cdot 28$. Egalitatea devine $2^n\cdot 28=(2k+1)\cdot 14$, adică $2^{n+1}=2k+1$. Partea stângă este pară pentru orice $n\in\mathbb{N}$, iar cea dreaptă este impară. Egalitatea nu se verifică niciodată: nu există nicio pereche.

Caz degenerat: mulțimea soluțiilor este vidă.

Răspuns: E

Problema 2024O-2.1. Sfertul lui 2^{25} este 2^{23}; $4^{10}=2^{20}$, deci jumătatea sa este 2^{19}. Diferența este $2^{23}-2^{19}=2^{19}\cdot(2^4-1)=2^{19}\cdot 15=2^{19}\cdot 3\cdot 5$. Se divide cu $30=2\cdot 3\cdot 5$. Nu se divide cu 45 (ar cere 3^2), nici cu 21, 35 sau 63 (ar cere factorul 7).

Diferența este $2^{19}\cdot 15$: factorii primi sunt doar 2, 3 și 5.

Răspuns: A

Problema 2024O-2.2. $9^{20}=3^{40}$, deci a treia parte este 3^{39}. A noua parte a lui 3^{37} este 3^{35}. Diferența este $3^{39}-3^{35}=3^{35}\cdot(3^4-1)=3^{35}\cdot 80=3^{35}\cdot 2^4\cdot 5$. Se divide cu $120=2^3\cdot 3\cdot 5$. Nu se divide cu $160=2^5\cdot 5$ (doar 2^4), cu 100 sau 75 (ar cere 5^2) și nici cu 14 (nu apare 7).

Contează puterea fiecărui factor prim: 2^4 nu acoperă 2^5.

Răspuns: B

Problema 2024O-2.3. $8^{10} = 2^{30}$, deci jumătatea sa este 2^{29}. Sfertul lui 2^{31} este $2^{31} : 4 = 2^{29}$. Cele două numere sunt egale, deci diferența este 0.

Caz degenerat: diferența este nulă.

Răspuns: A

Problema 2024O-9.1. Cu $S = 1 + 2 + \cdots + 2^9$ avem $2S - S = 2^{10} - 1$, deci $S = 1023$. Atunci $x = 2^{11} - 1023 = 2048 - 1023 = 1025$.

Aici capătul din dreapta este 2^{11}, nu 2^{10}: nu mai ies 1.

Răspuns: D

Problema 2024O-9.2. Cu $S = 1 + 2 + \cdots + 2^{2023}$ avem $2S - S = 2^{2024} - 1$, deci $S = 2^{2024} - 1$. Atunci $x = 2^{2025} - (2^{2024} - 1) = 2^{2024} \cdot (2 - 1) + 1 = 2^{2024} + 1$.

$2^{2025} - 2^{2024} = 2^{2024}$, apoi se adaugă 1 (se scade -1).

Răspuns: D

Problema 2024O-9.3. Din $2S - S$ avem $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Atunci $x = 2^{n+3} - (2^{n+1} - 1) = 2^{n+1} \cdot (4 - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} + 1 = 6 \cdot 2^n + 1$.

Verificare cu $n = 0$: $1 + x = 8$, deci $x = 7 = 6 \cdot 1 + 1$.

Răspuns: B

Problema 2016-7.1. $4^n + 4^{n+1} = 4^n \cdot (1 + 4) = 5 \cdot 4^n = 5 \cdot 2^{2n}$. Ecuația devine $2^{2n} = 2^{2018}$, deci $2n = 2018$ și $n = 1009$.

$4^n = 2^{2n}$: exponentul se dublează, nu rămâne $n = 2018$.

Răspuns: C

Problema 2016-7.2. $9^n + 9^{n+1} = 9^n \cdot (1 + 9) = 10 \cdot 3^{2n}$. Ecuația devine $3^{2n} = 3^{2022}$, deci $2n = 2022$ și $n = 1011$.

674 ar ieși dacă am împărți 2022 la 3, ca la baza 27.

Răspuns: B

Problema 2016-7.3. $8^n + 8^{n+1} = 9 \cdot 8^n = 9 \cdot 2^{3n}$, deci $2^{3n} = 2^{2017}$ și $3n = 2017$. Dar 2017 nu se împarte exact la 3 ($2017 = 3 \cdot 672 + 1$), deci nu există $n \in \mathbb{N}$ care să verifice ecuația.

Caz degenerat: ecuația nu are soluții naturale; răspunsul este "alt răspuns".

Răspuns: E

Problema 2010-8.1. $7 = 5 + 2$, deci 7^n are același rest ca 2^n la împărțirea cu 5. Atunci $m = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 7^n$ are același rest ca $2 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n$, multiplu de 5. Restul este 0.

Verificare: $n = 0$ dă $m = 2 + 3 = 5$; $n = 1$ dă $m = 4 + 21 = 25$.

Răspuns: B

Problema 2010-8.2. $6^n \cdot 7^n = 42^n$ și $42 = 2 \cdot 19 + 4$, deci 42^n are același rest ca 4^n la împărțirea cu 19. Atunci $4^{n+2} + 3 \cdot 42^n$ are același rest ca $16 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n = 19 \cdot 4^n$, adică 0. Rămâne termenul $7 < 19$: restul lui m este 7.

Termenul constant 7 nu se reduce: restul este 7, nu 0.

Răspuns: D

Problema 2010-8.3. $2^{n+2} \cdot 8^n = 4 \cdot 16^n$ și $16 = 13 + 3$, deci 16^n are același rest ca 3^n la împărțirea cu 13. Atunci $9 \cdot 3^n + 4 \cdot 16^n$ are același rest ca $9 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^n$, adică 0. Rămâne $+4 < 13$: restul lui m este 4, valoare care nu se află printre variantele $0, 1, 3, 9$.

Termenul $+4$ rămâne în rest; 4 nu este printre variante, deci "alt răspuns".

Răspuns: E

Problema 2010-9.1. $a = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^{10} = 28 \cdot 2^{10}$ și $b = 3 \cdot 2^{10}$. Cum $28 = 9 \cdot 3 + 1$, avem $a = 9 \cdot b + 2^{10}$ și $2^{10} < 3 \cdot 2^{10} = b$. Restul este 2^{10}.

Restul nu este 1: factorul 2^{10} rămâne.

Răspuns: B

Problema 2010-9.2. $a = 11 \cdot 3^2 \cdot 3^{2023} = 99 \cdot 3^{2023}$ și $b = 4 \cdot 3^{2023}$. Cum $99 = 24 \cdot 4 + 3$, avem $a = 24 \cdot b + 3 \cdot 3^{2023}$ și $3 \cdot 3^{2023} < 4 \cdot 3^{2023} = b$. Restul este $3 \cdot 3^{2023} = 3^{2024}$.

Restul este $3 \cdot 3^{2023} = 3^{2024}$, nu doar 3.

Răspuns: C

Problema 2010-9.3. $a = 6 \cdot 2 \cdot 2^{2009} = 12 \cdot 2^{2009} = 4 \cdot (3 \cdot 2^{2009}) = 4 \cdot b$. Deci b divide pe a și restul este 0.

Caz degenerat: împărțire exactă.

Răspuns: B

Problema 2010-12.1. Fie $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{20}}$. Atunci $3T - T = 1 - \frac{1}{3^{20}}$, deci $2T = 1 - \frac{1}{3^{20}}$. Expresia este $1 - 2T = \frac{1}{3^{20}}$.

Primul termen, 1, se reduce cu aproape tot ce se scade.

Răspuns: E

Problema 2010-12.2. Fie $T = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{15}}$. Atunci $5T - T = 1 - \frac{1}{5^{15}}$, deci $4T = 1 - \frac{1}{5^{15}}$. Expresia este $1 - 4T = \frac{1}{5^{15}}$.

Numărătorul 4 al fracțiilor este $5 - 1$: de aceea suma se închide.

Răspuns: A

Problema 2010-12.3. Ca la problema 2010-12, $\frac{2}{3^{10}} + \cdots + \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3^{10}}$. Expresia este $2 - \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = 1 + \frac{1}{3^{10}} = \frac{3^{10} + 1}{3^{10}}$.

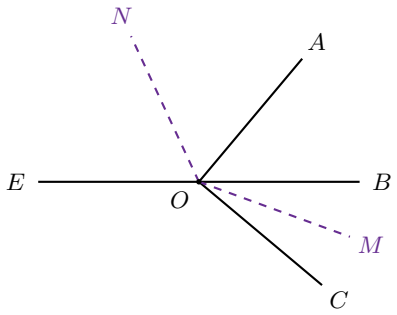
Aici primul termen este 2, nu 1: rămâne $1 + \frac{1}{3^{10}}$.

Răspuns: A

2. Unghiuri

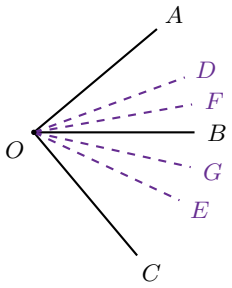
Enunțuri

Problema 2025-34. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit și $\sphericalangle BOC$ complementul său. Fie $[OE$ semidreapta opusă semidreptei $[OB$. Dacă $[OM$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $[ON$ este bisectoarea $\sphericalangle AOE$, atunci $m(\sphericalangle MON)$ este:



A $120°$ **B** $135°$ **C** $125°$ **D** $146°$ **E** $121°$

Problema 2024S-10. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente complementare și semidreptele $[OD$, $[OE$, $[OF$, $[OG$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle DOB$, respectiv $\sphericalangle EOB$. **Măsura unghiului $\sphericalangle FOG$ este egală cu:**



A $90°$ **B** $45°$ **C** $23°$ **D** $22°30'$ **E** $22°15'$

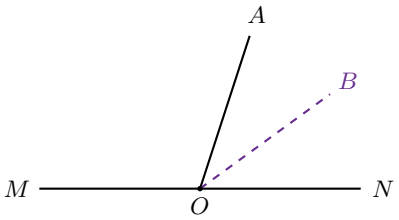
Problema 2024S-16. **Suplementul unui unghi care are măsura de** $125{,}2(6)°$ **este:**

A $55°16'$ **B** $54°54'$ **C** $54°44'$ **D** $56°44'$ **E** $55°30'$

Problema 2024S-21. Dacă suplementul suplementului complementului unui unghi are măsura de $20°$, **atunci unghiul are măsura de:**

A $160°$ **B** $140°$ **C** $70°$ **D** $50°$ **E** $80°$

Problema 2024S-40. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt opuse, iar punctele A și B sunt de aceeași parte a dreptei MN, $\sphericalangle BOM$ este obtuz, $m(\sphericalangle BOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle AON)$ și $[OB$ este bisectoarea $\sphericalangle AON$. **Măsura $\sphericalangle AON$ este egală cu:**



A $60°$ **B** $80°$ **C** $45°$ **D** $72°$ **E** $54°$

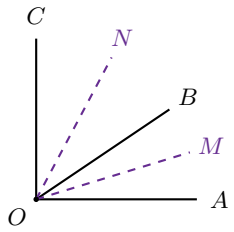
Problema 2024O-5. Complementul unui unghi care are măsura de $15{,}75°$ este:

A $74°30'$ **B** $74°45'$ **C** $74°15'$ **D** $74°18'30''$ **E** $74°20'$

Problema 2024O-6. Complementul suplementului unghiului care are măsura de $141{,}2(5)°$ este:

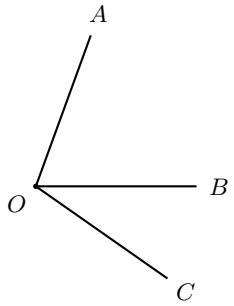
A $50°15'40''$ **B** $51°15'20''$ **C** $51°14'40''$ **D** $50°14'20''$ **E** $50°15'15''$

Problema 2024O-17. Raportul măsurilor a două unghiuri adiacente este $\frac{3}{5}$, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de $45°$. **Diferența măsurilor celor două unghiuri este egală cu:**



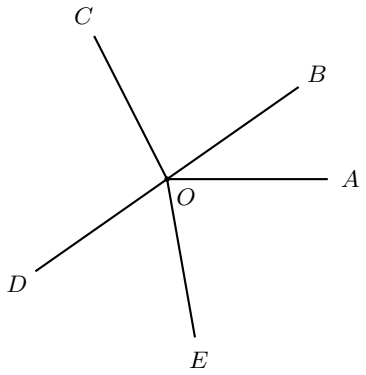
A $45°$ **B** $22°45'$ **C** $33°15'$ **D** $22°30'$ **E** alt răspuns

Problema 2010-36. Suma a două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ este egală cu m, $0° < m < 180°$. Dacă $\frac{m(\sphericalangle COB)}{m(\sphericalangle AOB)} = \frac{1}{n}$, **care este măsura $\sphericalangle AOB$ în funcție de m și n?**



A $\frac{m(n+1)}{n}$ **B** $\frac{m}{n+1}$ **C** $\frac{m}{n}$ **D** $\frac{mn}{n+1}$ **E** $\frac{m(n+1)}{n+2}$

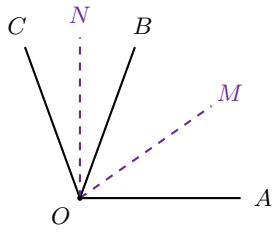
Problema 2010-37. Se dau semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ și $[OE$ în această ordine. Se știe că $m(\sphericalangle AOB) = 35°$, $m(\sphericalangle BOC) = 82°$, măsura $\sphericalangle DOE$ este cu 15° mai mică decât măsura $\sphericalangle AOE$, iar semidreptele $[OB$ și $[OD$ sunt semidrepte opuse. **Calculați** $m(\sphericalangle COE)$ **și** $m(\sphericalangle BOE)$**.**



A 163° și 115° **B** 165° și 120° **C** 10° și 170°

D 121° și 100° **E** 169° și 35°

Problema 2010-38. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ formează cu semidreapta $[OC$ un unghi cu măsura de 75°, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ formează cu semidreapta $[OA$ un unghi drept. **Măsura unghiului** $\sphericalangle AOC$ **este egală cu:**



A 165° **B** 45° **C** 110° **D** 180° **E** 15°

Problema 2010-40. Efectuați următoarele operații cu măsuri de unghiuri, precizând rezultatul final:

$$(86° - 7°12'54'') : 7 + (11°45' - 7°12'54'') \cdot 7$$

unde notațiile folosite semnifică următoarele: $°$ = grade, $'$ = minute, $''$ = secunde.

A 41° **B** 42° **C** 43° **D** 44° **E** 45°

Rezolvări – capitolul 2

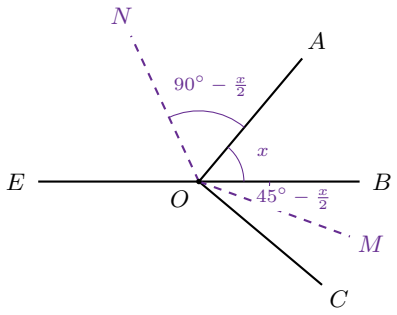
Problema 2025-34. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$, cu $x < 90^\circ$. Unghiul $\sphericalangle BOC$ este complementul lui, deci $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x$. Luăm cele două unghiuri adiacente (A și C de o parte și de alta a semidreptei $[OB$, ca în figură).

- $[OM$ este bisectoare: $m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{90^\circ - x}{2} = 45^\circ - \dfrac{x}{2}$.
- $[OB$ și $[OE$ sunt opuse, deci $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOE$ sunt adiacente suplementare: $m(\sphericalangle AOE) = 180^\circ - x$. $[ON$ este bisectoare: $m(\sphericalangle AON) = \dfrac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$.

Semidreptele se succed în ordinea $[OM$, $[OB$, $[OA$, $[ON$, deci

$$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOA) + m(\sphericalangle AON) = \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) + x + \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = 135^\circ.$$

Termenii cu x se reduc: rezultatul nu depinde de x.



Răspuns: B

Dacă am uita că $[OE$ e opusă lui $[OB$ și am lua $\sphericalangle AOE = 90^\circ$, am obține 90°, care nu e printre variante; $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$. Enunțul presupune A și C de o parte și de alta a lui $[OB$; dacă ar fi de aceeași parte, vezi 2025-34.3.

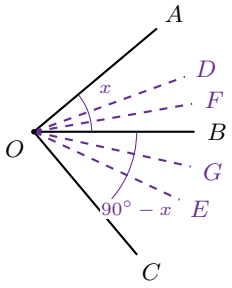
Problema 2024S-10. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$, deci $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x$ (unghiuri complementare).

- $[OD$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$: $m(\sphericalangle DOB) = \dfrac{x}{2}$; $[OF$ este bisectoarea lui $\sphericalangle DOB$: $m(\sphericalangle BOF) = \dfrac{x}{4}$.
- $[OE$ este bisectoarea lui $\sphericalangle BOC$: $m(\sphericalangle EOB) = \dfrac{90^\circ - x}{2}$; $[OG$ este bisectoarea lui $\sphericalangle EOB$: $m(\sphericalangle BOG) = \dfrac{90^\circ - x}{4}$.

$[OF$ și $[OG$ sunt de o parte și de alta a semidreptei $[OB$, deci

$$m(\sphericalangle FOG) = \frac{x}{4} + \frac{90^\circ - x}{4} = \frac{90^\circ}{4} = 22{,}5^\circ = 22^\circ 30'.$$

Rezultatul nu depinde de x ($0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot 60' = 30'$).



Răspuns: D

$22^\circ 15'$ ar fi $22{,}25^\circ$: $0{,}5^\circ$ înseamnă $30'$, nu $15'$.

Problema 2024S-16. Transformăm zecimala periodică în fracție: $0{,}2(6) = \dfrac{26-2}{90} = \dfrac{24}{90} = \dfrac{4}{15}$, deci $x = 125° + \dfrac{4}{15}°$.

Suplementul: $180° - x = 55° - \dfrac{4}{15}° = 54° + \dfrac{11}{15}°$.

Trecem în minute ($1° = 60'$): $\dfrac{11}{15} \cdot 60' = 44'$. Suplementul este $54°44'$.

Verificare: $\dfrac{4}{15}° = \dfrac{4}{15} \cdot 60' = 16'$, iar $125°16' + 54°44' = 125° + 54° + 60' = 180°$. **Răspuns: C**

$55°16'$ apare dacă $\frac{4}{15}° = 16'$ se adaugă la $55°$ în loc să se scadă din ea.

Problema 2024S-21. Suplementul suplementului unui unghi este chiar unghiul: $180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Enunțul spune deci, de fapt, că *complementul* unghiului are $20°$.

Cu $m(\text{unghi}) = x$: $90° - x = 20°$, deci $x = 70°$.

Verificare: complementul lui $70°$ este $20°$, suplementul lui $20°$ este $160°$, iar suplementul lui $160°$ este $20°$. **Răspuns: C**

$160°$ este un rezultat intermediar (suplementul complementului), nu unghiul căutat.

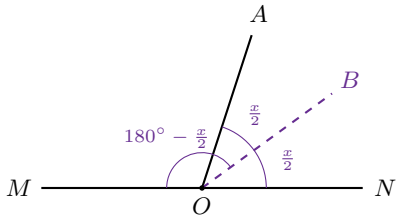
Problema 2024S-40. Notăm $m(\sphericalangle AON) = x$. $[OB$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AON$, deci $m(\sphericalangle BON) = \dfrac{x}{2}$.

$[OM$ și $[ON$ sunt opuse, deci $\sphericalangle BOM$ și $\sphericalangle BON$ sunt adiacente suplementare: $m(\sphericalangle BOM) = 180° - \dfrac{x}{2}$.

Condiția $m(\sphericalangle BOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle AON)$ devine

$$180° - \frac{x}{2} = 2x \implies 180° = \frac{5x}{2} \implies x = 72°.$$

Verificare: $m(\sphericalangle BON) = 36°$, $m(\sphericalangle BOM) = 144° = 2 \cdot 72°$, iar $144°$ este obtuz.



Răspuns: D

$60°$ s-ar obține dacă am uita bisectoarea și am lua $m(\sphericalangle BOM) = 180° - x$: $2x + x = 180°$.

Problema 2024O-5. Trecem partea zecimală în minute: $0{,}75° = 0{,}75 \cdot 60' = 45'$, deci $15{,}75° = 15°45'$.

Complementul este $90° - 15°45'$. Scriem $90° = 89°60'$ ($1° = 60'$):

$$89°60' - 15°45' = 74°15'.$$

Verificare: $74°15' + 15°45' = 89°60' = 90°$. **Răspuns: C**

$0{,}75°$ nu înseamnă $75'$: $1° = 60'$, deci $0{,}75° = 45'$.

Problema 2024O-6. Transformăm zecimala periodică în fracție: $0{,}2(5) = \dfrac{25-2}{90} = \dfrac{23}{90}$, deci $x = 141° + \dfrac{23}{90}°$.

Suplementul: $180° - x = 39° - \dfrac{23}{90}° = 38° + \dfrac{67}{90}°$.

Complementul suplementului: $90° - \left(38° + \dfrac{67}{90}°\right) = 52° - \dfrac{67}{90}° = 51° + \dfrac{23}{90}°$.

Trecem în minute și secunde ($1° = 60'$, $1' = 60''$):

$$\frac{23}{90} \cdot 60' = \frac{46'}{3} = 15' + \frac{1}{3} \cdot 60'' = 15' + 20''.$$

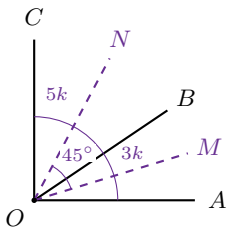
Rezultatul este $51°15'20''$. (Verificare: pentru x obtuz, complementul suplementului este $x - 90° = 51{,}2(5)°$.) **Răspuns: B**

$0{,}2(5)$ nu este $\frac{25}{90}$: se scade partea neperiodică, $\frac{25-2}{90}$.

Problema 2024O-17. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = 3k$ și $m(\sphericalangle BOC) = 5k$ (raportul este $\frac{3}{5}$); unghiurile sunt adiacente, iar $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele lor.
$m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{3k}{2}$ și $m(\sphericalangle BON) = \dfrac{5k}{2}$, de o parte și de alta a lui $[OB$, deci

$$m(\sphericalangle MON) = \frac{3k}{2} + \frac{5k}{2} = 4k = 45^\circ \implies k = 45^\circ : 4 = 11{,}25^\circ = 11^\circ 15'.$$

Diferența: $5k - 3k = 2k = 22{,}5^\circ = 22^\circ 30'$. (Unghiurile sunt $33^\circ 45'$ și $56^\circ 15'$.)



Răspuns: D

Atenție: $11{,}25^\circ$ *nu este* $11^\circ 25'$*;* $0{,}25^\circ = 15'$ *și* $0{,}5^\circ = 30'$.

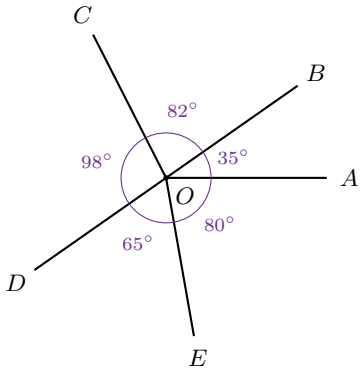
Problema 2010-36. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = a$. Din raport, $m(\sphericalangle COB) = \dfrac{a}{n}$. Unghiurile sunt adiacente, deci suma lor este m:

$$a + \frac{a}{n} = m \implies a \cdot \frac{n+1}{n} = m \implies a = \frac{mn}{n+1}.$$

Verificare cu $n = 2$, $m = 90^\circ$: $a = 60^\circ$, $m(\sphericalangle COB) = 30^\circ$, raportul este $\frac{1}{2}$ și suma 90°. **Răspuns: D**

$\frac{m}{n+1}$ *este măsura lui* $\sphericalangle COB$*, unghiul mai mic.*

Problema 2010-37. $[OB$ și $[OD$ sunt opuse, iar $[OC$ este între ele: $m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ$, deci $m(\sphericalangle COD) = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$.
De cealaltă parte a dreptei BD se află $[OE$ și $[OA$: $m(\sphericalangle DOE) + m(\sphericalangle EOA) + m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ$, deci $m(\sphericalangle DOE) + m(\sphericalangle EOA) = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$.
Notăm $m(\sphericalangle AOE) = y$; atunci $m(\sphericalangle DOE) = y - 15^\circ$ și $(y - 15^\circ) + y = 145^\circ$, de unde $y = 80^\circ$ și $m(\sphericalangle DOE) = 65^\circ$.
$m(\sphericalangle COE) = m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOE) = 98^\circ + 65^\circ = 163^\circ$.
$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle BOA) + m(\sphericalangle AOE) = 35^\circ + 80^\circ = 115^\circ$.



Răspuns: A

Suma unghiurilor din jurul punctului O *este* $35^\circ + 82^\circ + 98^\circ + 65^\circ + 80^\circ = 360^\circ$.

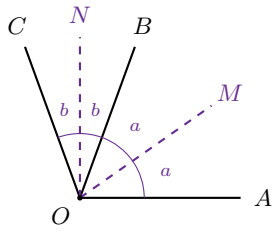
Problema 2010-38. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = 2a$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2b$. Fie $[OM$ bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$ și $[ON$ bisectoarea lui $\sphericalangle BOC$; atunci $m(\sphericalangle MOB) = a$ și $m(\sphericalangle BON) = b$.

- $m(\sphericalangle MOC) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOC) = a + 2b = 75^\circ$;
- $m(\sphericalangle AON) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BON) = 2a + b = 90^\circ$.

Adunăm cele două egalități: $3a + 3b = 165^\circ$, deci $a + b = 55^\circ$ și

$$m(\sphericalangle AOC) = 2a + 2b = 110^\circ.$$

Verificare: $a = 35^\circ$, $b = 20^\circ$ dau $a + 2b = 75^\circ$ și $2a + b = 90^\circ$.



Răspuns: C

$165^\circ = 75^\circ + 90^\circ = m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle MON)$: *suma datelor numără unghiul* $\sphericalangle MON$ *de două ori.*

Problema 2010-40. Folosim $1^\circ = 60'$ și $1' = 60''$.

Primul termen. $86^\circ = 85^\circ 59' 60''$, deci $86^\circ - 7^\circ 12' 54'' = 78^\circ 47' 6''$. Împărțim la 7 pe rând: $78^\circ : 7 = 11^\circ$, rest $1^\circ = 60'$; $(60' + 47') : 7 = 107' : 7 = 15'$, rest $2' = 120''$; $(120'' + 6'') : 7 = 126'' : 7 = 18''$. Rezultă $11^\circ 15' 18''$.

Al doilea termen. $11^\circ 45' = 11^\circ 44' 60''$, deci $11^\circ 45' - 7^\circ 12' 54'' = 4^\circ 32' 6''$. Înmulțim cu 7: $28^\circ + 224' + 42''$, iar $224' = 3^\circ 44'$, deci $31^\circ 44' 42''$.

Suma. $11^\circ 15' 18'' + 31^\circ 44' 42'' = 42^\circ 59' 60'' = 43^\circ$. **Răspuns: C**

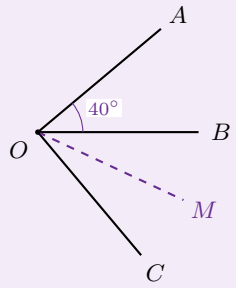
La fiecare operație se aduc minutele peste 60 *în grade și secundele peste* 60 *în minute.*

2A. Unghiuri – exerciții asemănătoare

Enunțuri

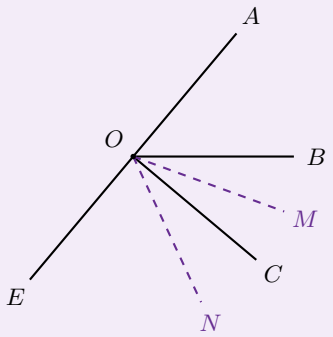
Asemănătoare cu problema 2025-34

Problema 2025-34.1. Fie $m(\sphericalangle AOB) = 40°$ și $\sphericalangle BOC$ complementul său, cele două unghiuri fiind adiacente (ca în figură). Dacă $[OM$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$, atunci $m(\sphericalangle AOM)$ este:



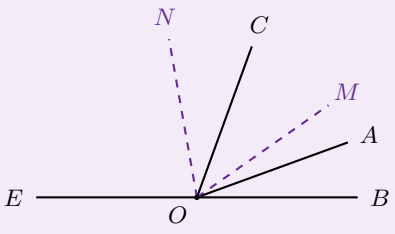
A 25° **B** 45° **C** 90° **D** 65° **E** 115°

Problema 2025-34.2. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit și $\sphericalangle BOC$ complementul său, adiacente. Fie $[OE$ semidreapta opusă semidreptei $[OA$. Dacă $[OM$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $[ON$ este bisectoarea $\sphericalangle BOE$, atunci $m(\sphericalangle MON)$ este:



A 90° **B** 135° **C** 45° **D** 30° **E** 60°

Problema 2025-34.3. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit și $\sphericalangle BOC$ complementul său, cu A și C *de aceeași parte* a dreptei OB (figura). Fie $[OE$ semidreapta opusă lui $[OB$, $[OM$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $[ON$ bisectoarea $\sphericalangle AOE$. Atunci $m(\sphericalangle MON)$ este:

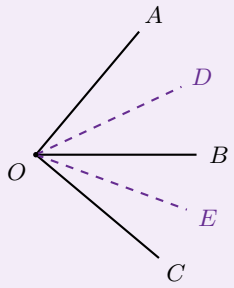


A 135° **B** 45° **C** 90°

D 60° **E** depinde de $m(\sphericalangle AOB)$

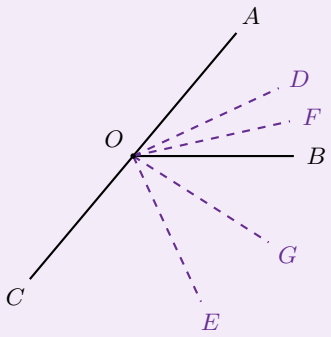
Asemănătoare cu problema 2024S-10

Problema 2024S-10.1. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente complementare, iar $[OD$ și $[OE$ bisectoarele lor. Măsura unghiului $\sphericalangle DOE$ este:



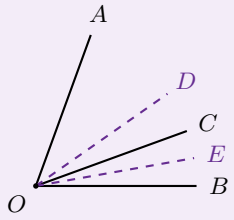
A 45° **B** 90° **C** 30° **D** 22°30′ **E** 60°

Problema 2024S-10.2. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente suplementare, $[OD$ și $[OE$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle BOC$, iar $[OF$ și $[OG$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DOB$, respectiv $\sphericalangle EOB$. Măsura unghiului $\sphericalangle FOG$ este:



A 90° **B** 45° **C** 22°30′ **D** 135° **E** 30°

Problema 2024S-10.3. Fie $\sphericalangle AOB$ ascuțit, cu $m(\sphericalangle AOB) > 45°$, și $\sphericalangle BOC$ complementul său, cu A și C *de aceeași parte* a dreptei OB (figura). $[OD$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$, iar $[OE$ bisectoarea lui $\sphericalangle BOC$. Atunci $m(\sphericalangle DOE)$ este:



A 45° **B** 90° **C** 22°30′

D 0° **E** depinde de $m(\sphericalangle AOB)$

Asemănătoare cu problema 2024S-16

Problema 2024S-16.1. **Suplementul unui unghi care are măsura de** $112{,}5^\circ$ **este:**

A $67^\circ 50'$ **B** $67^\circ 30'$ **C** $77^\circ 30'$ **D** $22^\circ 30'$ **E** $68^\circ 30'$

Problema 2024S-16.2. **Suplementul unui unghi care are măsura de** $78{,}1(6)^\circ$ **este:**

A $101^\circ 50'$ **B** $11^\circ 50'$ **C** $101^\circ 10'$ **D** $101^\circ 56'$ **E** $102^\circ 10'$

Problema 2024S-16.3. **Diferența dintre suplementul și complementul unui unghi de** $37{,}2(5)^\circ$ **este:**

A 45° **B** 90° **C** $52^\circ 44' 40''$ **D** $142^\circ 44' 40''$ **E** $37^\circ 15' 20''$

Asemănătoare cu problema 2024S-21

Problema 2024S-21.1. Dacă suplementul complementului unui unghi are măsura de 120°, atunci unghiul are măsura de:

A 60° **B** 30° **C** 120° **D** 150° **E** 90°

Problema 2024S-21.2. Dacă complementul complementului complementului unui unghi are măsura de 64°, atunci unghiul are măsura de:

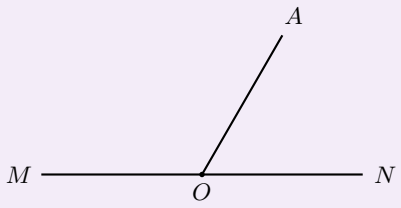
A 26° **B** 64° **C** 116° **D** 154° **E** 36°

Problema 2024S-21.3. Dacă suplementul suplementului complementului unui unghi are măsura de 110°, atunci unghiul are măsura de:

A 20° **B** 70° **C** 110° **D** 160° **E** alt răspuns

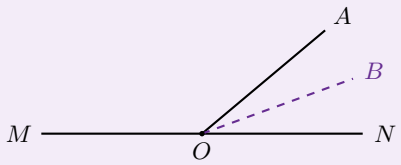
Asemănătoare cu problema 2024S-40

Problema 2024S-40.1. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt opuse, iar A este un punct din afara dreptei MN, cu $m(\sphericalangle AOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle AON)$. Măsura unghiului $\sphericalangle AON$ este:



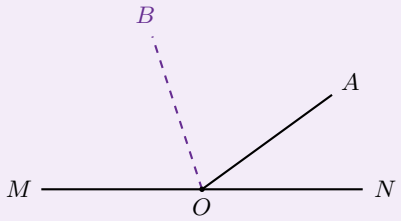
A 60° **B** 120° **C** 30° **D** 90° **E** 45°

Problema 2024S-40.2. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt opuse, punctele A și B sunt de aceeași parte a dreptei MN, $[OB$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AON$ și $m(\sphericalangle BOM) = 4 \cdot m(\sphericalangle AON)$. Măsura unghiului $\sphericalangle AON$ este:



A 20° **B** 40° **C** 45° **D** 36° **E** 80°

Problema 2024S-40.3. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt opuse, punctele A și B sunt de aceeași parte a dreptei MN, $[OB$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AOM$ și $m(\sphericalangle BOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle AON)$. Măsura unghiului $\sphericalangle AON$ este:



A 72° **B** 60° **C** 45° **D** 30° **E** 36°

Asemănătoare cu problema 2024O-5

Problema 2024O-5.1. Complementul unui unghi care are măsura de 27,5° este:

A 62°50′ **B** 63°30′ **C** 62°15′ **D** 62°30′ **E** 152°30′

Problema 2024O-5.2. Complementul unui unghi care are măsura de 38,2° este:

A 51°12′ **B** 52°48′ **C** 51°58′ **D** 141°48′ **E** 51°48′

Problema 2024O-5.3. Suplementul complementului unui unghi care are măsura de 33,2(3)° este:

A 123°14′ **B** 56°46′ **C** 146°46′ **D** 123°20′ **E** 56°14′

Asemănătoare cu problema 2024O-6

Problema 2024O-6.1. Complementul suplementului unghiului care are măsura de 132,5° este:

A 47°30′ **B** 42°50′ **C** 137°30′ **D** 43°30′ **E** 42°30′

Problema 2024O-6.2. Complementul suplementului unghiului care are măsura de 128,1(6)° este:

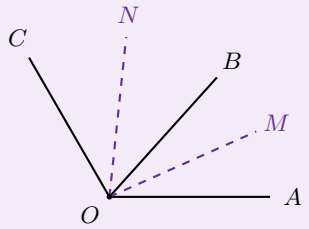
A 38°50′ **B** 38°10′ **C** 38°16′ **D** 51°50′ **E** 38°6′

Problema 2024O-6.3. Complementul suplementului unghiului care are măsura de 75,(3)° este:

A 14°40′ **B** 104°40′ **C** 15°20′ **D** 29°20′ **E** alt răspuns

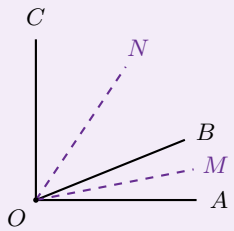
Asemănătoare cu problema 2024O-17

Problema 2024O-17.1. Raportul măsurilor a două unghiuri adiacente este $\frac{2}{3}$, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 50°. Diferența măsurilor celor două unghiuri este:



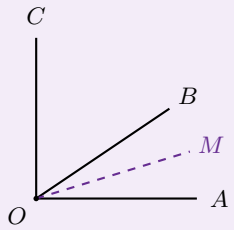
A 20° **B** 10° **C** 25° **D** 40° **E** 100°

Problema 2024O-17.2. Raportul măsurilor a două unghiuri adiacente este $\frac{2}{7}$, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 36°. Diferența măsurilor celor două unghiuri este:



A 36° **B** 20° **C** 72° **D** 40° **E** 8°

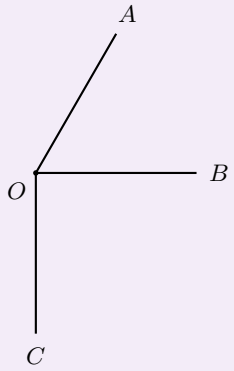
Problema 2024O-17.3. Raportul măsurilor a două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ este $\frac{3}{5}$, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 45°. Fie $[OM$ bisectoarea lui $\sphericalangle AOB$. Măsura unghiului $\sphericalangle MOC$ este:



A 90° **B** 73°7′30″ **C** 45° **D** 73°15′ **E** 78°45′

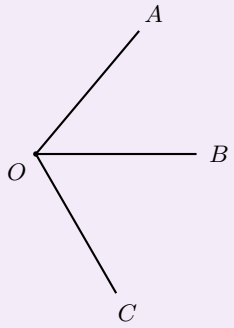
Asemănătoare cu problema 2010-36

Problema 2010-36.1. Suma a două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ este $150°$, iar $\dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \dfrac{2}{3}$. Măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este:



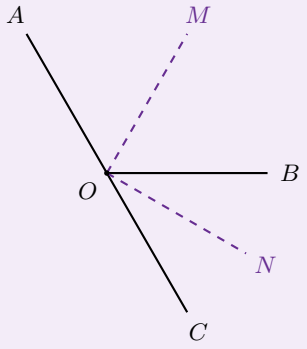
A $90°$ **B** $100°$ **C** $50°$ **D** $75°$ **E** $60°$

Problema 2010-36.2. Suma a două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ este egală cu m, $0° < m < 180°$. Dacă $\dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \dfrac{n}{n+1}$, **atunci** $m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle AOB)$ **este:**



A $\dfrac{m}{2n+1}$ **B** $\dfrac{m}{n+1}$ **C** $\dfrac{m}{2n}$ **D** $\dfrac{mn}{2n+1}$ **E** $\dfrac{m(n+1)}{2n+1}$

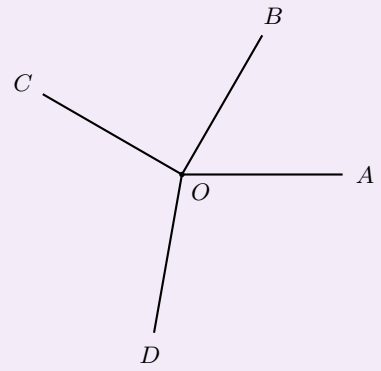
Problema 2010-36.3. Unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar $\dfrac{m(\sphericalangle COB)}{m(\sphericalangle AOB)} = \dfrac{1}{n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Bisectoarele celor două unghiuri formează un unghi cu măsura:



A $\dfrac{90°}{n}$ **B** $90°$ **C** $\dfrac{180°}{n+1}$ **D** $45°$ **E** $\dfrac{180°n}{n+1}$

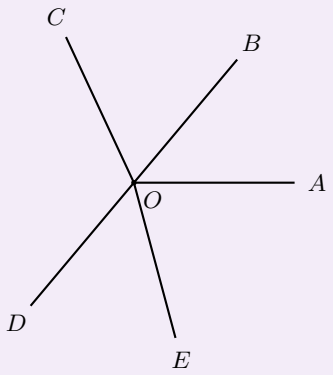
Asemănătoare cu problema 2010-37

Problema 2010-37.1. Se dau semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ și $[OD$ în această ordine în jurul punctului O, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 60°$, $m(\sphericalangle BOC) = 90°$ și $m(\sphericalangle COD) = 110°$. Măsura unghiului $\sphericalangle DOA$ este:



A 160° **B** 200° **C** 100° **D** 90° **E** 110°

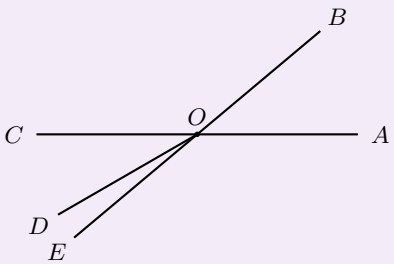
Problema 2010-37.2. Se dau semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ și $[OE$ în această ordine. Se știe că $m(\sphericalangle AOB) = 50°$, $m(\sphericalangle BOC) = 65°$, $m(\sphericalangle DOE)$ este cu 20° mai mică decât $m(\sphericalangle AOE)$, iar $[OB$ și $[OD$ sunt semidrepte opuse. Calculați $m(\sphericalangle COE)$ și $m(\sphericalangle BOE)$.



A 165° și 130° **B** 175° și 120° **C** 115° și 50°

D 170° și 135° **E** 170° și 125°

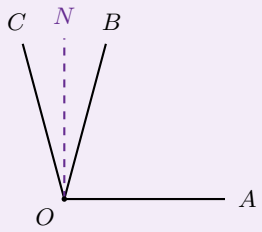
Problema 2010-37.3. Se dau semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ și $[OE$ în această ordine în jurul punctului O, astfel încât $[OA$ și $[OC$ sunt opuse, $[OB$ și $[OE$ sunt opuse, $m(\sphericalangle AOB) = 40°$ și $m(\sphericalangle COD) = 3 \cdot m(\sphericalangle DOE)$. Măsura unghiului $\sphericalangle AOD$ este:



A 150° **B** 30° **C** 210° **D** 140° **E** 170°

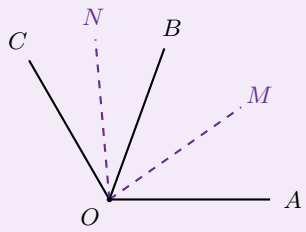
Asemănătoare cu problema 2010-38

Problema 2010-38.1. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, cu $m(\sphericalangle AOB) = 80°$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ formează cu semidreapta $[OA$ un unghi drept. Măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ este:



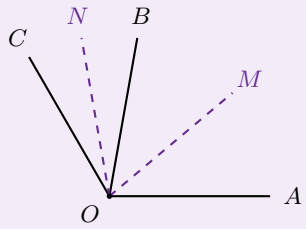
A $90°$ **B** $100°$ **C** $110°$ **D** $20°$ **E** $120°$

Problema 2010-38.2. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ formează cu semidreapta $[OC$ un unghi cu măsura de $85°$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ formează cu semidreapta $[OA$ un unghi cu măsura de $95°$. Măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ este:



A $180°$ **B** $60°$ **C** $90°$ **D** $120°$ **E** $110°$

Problema 2010-38.3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Bisectoarea $[OM$ a unghiului $\sphericalangle AOB$ formează cu semidreapta $[OC$ un unghi cu măsura de $80°$, iar bisectoarea $[ON$ a unghiului $\sphericalangle BOC$ formează cu semidreapta $[OA$ un unghi cu măsura de $100°$. Măsura unghiului $\sphericalangle MON$ este:



A $120°$ **B** $90°$ **C** $60°$ **D** $30°$ **E** $45°$

Asemănătoare cu problema 2010-40

Problema 2010-40.1. Efectuați operațiile cu măsuri de unghiuri: $(95° - 4°30') : 6 + (2°48' + 1°42') \cdot 4$.

A $33°5'$ **B** $33°50'$ **C** $34°5'$ **D** $32°5'$ **E** $33°$

Problema 2010-40.2. Efectuați operațiile cu măsuri de unghiuri:
$(90° - 52°52'36'') : 7 + (9°40' - 6°29'33'') \cdot 4$.

A $17°$ **B** $19°$ **C** $18°30'$ **D** $18°$ **E** $18°16'12''$

Problema 2010-40.3. Efectuați operațiile cu măsuri de unghiuri și exprimați rezultatul în secunde:
$(20°15' - 4°30') : 3 + (1°20' + 0°40') \cdot 3$.

A $41100''$ **B** $675''$ **C** $40500''$ **D** $39600''$ **E** $4050''$

Rezolvări – capitolul 2A

Problema 2025-34.1. $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, iar $[OM$ o împarte în două unghiuri egale: $m(\sphericalangle BOM) = 50^\circ : 2 = 25^\circ$. $[OB$ este între $[OA$ și $[OM$, deci $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOM) = 40^\circ + 25^\circ = 65^\circ$. **Răspuns: D**

25° e doar jumătatea lui $\sphericalangle BOC$; 45° ar fi jumătatea lui $\sphericalangle AOC = 90^\circ$.

Problema 2025-34.2. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$; $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x$. $[OA$ și $[OE$ sunt opuse, deci $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOE$ sunt adiacente suplementare: $m(\sphericalangle BOE) = 180^\circ - x$. Bisectoarele: $m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{90^\circ - x}{2}$ și $m(\sphericalangle BON) = \dfrac{180^\circ - x}{2}$. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt de aceeași parte a lui $[OB$ (în interiorul lui $\sphericalangle BOE$, căci $90^\circ - x < 180^\circ - x$), iar $[OM$ e mai aproape de $[OB$, deci

$$m(\sphericalangle MON) = \frac{180^\circ - x}{2} - \frac{90^\circ - x}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

indiferent de x. **Răspuns: C**

Problema 2025-34.3. Cu $m(\sphericalangle AOB) = x$ avem $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x$, de aceeași parte a lui $[OB$ ca A. Atunci $m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{90^\circ - x}{2} = 45^\circ - \dfrac{x}{2}$. Din $m(\sphericalangle AOE) = 180^\circ - x$ rezultă $m(\sphericalangle AON) = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$, deci $m(\sphericalangle BON) = x + 90^\circ - \dfrac{x}{2} = 90^\circ + \dfrac{x}{2}$. Ordinea semidreptelor este $[OB$, $[OM$, $[ON$, așa că

$$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle BON) - m(\sphericalangle BOM) = 90^\circ + \frac{x}{2} - 45^\circ + \frac{x}{2} = 45^\circ + x.$$

Rezultatul depinde de x: de exemplu $x = 30^\circ$ dă 75°, $x = 60^\circ$ dă 105°. Nicio valoare fixă din variante nu e valabilă. **Răspuns: E**

Alt răspuns: spre deosebire de problema 2025-34, aici termenii cu x nu se mai reduc.

Problema 2024S-10.1. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$, deci $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x$. $m(\sphericalangle DOB) = \dfrac{x}{2}$ și $m(\sphericalangle BOE) = \dfrac{90^\circ - x}{2}$, iar $[OD$ și $[OE$ sunt de o parte și de alta a lui $[OB$:

$$m(\sphericalangle DOE) = \frac{x}{2} + \frac{90^\circ - x}{2} = 45^\circ.$$

Răspuns: A

90° este $m(\sphericalangle AOC)$; bisectoarele înjumătățesc unghiul, deci $m(\sphericalangle DOE) = \frac{1}{2}\, m(\sphericalangle AOC)$.

Problema 2024S-10.2. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$, deci $m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ - x$. Atunci $m(\sphericalangle DOB) = \dfrac{x}{2}$, $m(\sphericalangle BOF) = \dfrac{x}{4}$, $m(\sphericalangle EOB) = \dfrac{180^\circ - x}{2}$, $m(\sphericalangle BOG) = \dfrac{180^\circ - x}{4}$. Cum $[OF$ și $[OG$ sunt de o parte și de alta a lui $[OB$,

$$m(\sphericalangle FOG) = \frac{x}{4} + \frac{180^\circ - x}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ.$$

Răspuns: B

La unghiuri suplementare se obține $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$; la complementare (2024S-10), $\frac{90^\circ}{4} = 22^\circ 30'$.

Problema 2024S-10.3. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$, cu $x > 45^\circ$; atunci $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - x < x$, deci $[OC$ este în interiorul lui $\sphericalangle AOB$. $m(\sphericalangle BOD) = \dfrac{x}{2}$ și $m(\sphericalangle BOE) = \dfrac{90^\circ - x}{2}$, ambele de aceeași parte a lui $[OB$, deci se scad:

$$m(\sphericalangle DOE) = \frac{x}{2} - \frac{90^\circ - x}{2} = x - 45^\circ.$$

Rezultatul depinde de x: pentru $x = 60^\circ$ se obține 15°, pentru $x = 80^\circ$ se obține 35°. **Răspuns: E**

Alt răspuns: când unghiurile sunt de aceeași parte, bisectoarele se scad și x nu se mai reduce.

Problema 2024S-16.1. $0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot 60' = 30'$, deci unghiul este $112^\circ 30'$. Scriem $180^\circ = 179^\circ 60'$:

$$179^\circ 60' - 112^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$

Răspuns: B

$67^\circ 50'$ *apare dacă* $0{,}5^\circ$ *se scrie* $50'$*; dar* $1^\circ = 60'$.

Problema 2024S-16.2. $0{,}1(6) = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6}$, deci $x = 78^\circ + \dfrac{1}{6}^\circ = 78^\circ 10'$ ($\frac{1}{6} \cdot 60' = 10'$). Atunci

$$180^\circ - 78^\circ 10' = 179^\circ 60' - 78^\circ 10' = 101^\circ 50'.$$

Răspuns: A

$11^\circ 50'$ *este complementul lui* $78^\circ 10'$*, nu suplementul.*

Problema 2024S-16.3. Rezultatul nu depinde de unghi: $(180^\circ - x) - (90^\circ - x) = 90^\circ$.

Verificare cu valoarea dată: $0{,}2(5) = \dfrac{23}{90}$ și $\dfrac{23}{90} \cdot 60' = 15'20''$, deci $x = 37^\circ 15'20''$. Suplementul este $142^\circ 44'40''$, complementul $52^\circ 44'40''$, iar diferența 90°. **Răspuns: B**

Valorile $142^\circ 44'40''$ *și* $52^\circ 44'40''$ *sunt rezultate intermediare (suplementul, respectiv complementul).*

Problema 2024S-21.1. Notăm unghiul x. Complementul lui este $90^\circ - x$, iar suplementul acestuia $180^\circ - (90^\circ - x) = 90^\circ + x$. Din $90^\circ + x = 120^\circ$ rezultă $x = 30^\circ$.

Verificare: complementul lui 30° este 60°, iar suplementul lui 60° este 120°. **Răspuns: B**

60° *este complementul unghiului, nu unghiul însuși.*

Problema 2024S-21.2. Complementul complementului unui unghi este chiar unghiul: $90^\circ - (90^\circ - x) = x$. Deci complementul complementului complementului lui x este complementul lui x: $90^\circ - x = 64^\circ$, de unde $x = 26^\circ$.

Verificare: $26^\circ \to 64^\circ \to 26^\circ \to 64^\circ$. **Răspuns: A**

64° *este chiar rezultatul celor trei complementări; unghiul inițial este complementul lui.*

Problema 2024S-21.3. Suplementul suplementului unui unghi este chiar unghiul, deci complementul unghiului ar trebui să fie 110°: $90^\circ - x = 110^\circ$, adică $x = -20^\circ$. Imposibil: complementul unui unghi este mai mic decât 90°, deci niciun unghi nu verifică enunțul. **Răspuns: E**

Cu 20° *în loc de* 110° *(ca la 2024S-21) răspunsul ar fi* 70°*; aici* $110^\circ > 90^\circ$ *nu poate fi complement.*

Problema 2024S-40.1. $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle AON$ sunt adiacente suplementare. Cu $m(\sphericalangle AON) = x$: $2x + x = 180^\circ$, deci $x = 60^\circ$. **Răspuns: A**

120° *este* $m(\sphericalangle AOM)$*, nu* $m(\sphericalangle AON)$.

Problema 2024S-40.2. Notăm $m(\sphericalangle AON) = x$; $m(\sphericalangle BON) = \dfrac{x}{2}$ și $m(\sphericalangle BOM) = 180^\circ - \dfrac{x}{2}$. Din $m(\sphericalangle BOM) = 4x$:

$$180^\circ - \frac{x}{2} = 4x \implies 180^\circ = \frac{9x}{2} \implies x = 40^\circ.$$

Verificare: $m(\sphericalangle BOM) = 160^\circ = 4 \cdot 40^\circ$. **Răspuns: B**

36° *apare dacă se uită bisectoarea* ($4x + x = 180^\circ$)*;* 20° *este* $m(\sphericalangle BON)$.

Problema 2024S-40.3. Notăm $m(\sphericalangle AON) = x$; atunci $m(\sphericalangle AOM) = 180^\circ - x$ (adiacente suplementare), iar [OB este bisectoarea lui $\sphericalangle AOM$: $m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{180^\circ - x}{2}$. Din $m(\sphericalangle BOM) = 2x$:

$$180^\circ - x = 4x \implies x = 36^\circ.$$

Verificare: $m(\sphericalangle BOM) = 72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$. **Răspuns: E**

Spre deosebire de 2024S-40, bisectoarea este a lui $\sphericalangle AOM$*, nu a lui* $\sphericalangle AON$*.* 72° *este* $m(\sphericalangle BOM)$.

Problema 2024O-5.1. $0{,}5^\circ = 30'$, deci unghiul este $27^\circ 30'$. Scriem $90^\circ = 89^\circ 60'$:

$$89^\circ 60' - 27^\circ 30' = 62^\circ 30'.$$

Răspuns: D

$152^\circ 30'$ *este suplementul, nu complementul.*

Problema 2024O-5.2. $0{,}2° = 0{,}2 \cdot 60' = 12'$, deci unghiul este $38°12'$. Atunci

$$90° - 38°12' = 89°60' - 38°12' = 51°48'.$$

Răspuns: E

$141°48'$ *este suplementul.* $0{,}2°$ *înseamnă* $12'$*, nu* $20'$*.*

Problema 2024O-5.3. $0{,}2(3) = \dfrac{23-2}{90} = \dfrac{21}{90} = \dfrac{7}{30}$ și $\dfrac{7}{30} \cdot 60' = 14'$, deci $x = 33°14'$.
Complementul: $90° - 33°14' = 56°46'$. Suplementul complementului: $180° - 56°46' = 123°14'$. **Răspuns: A**
$56°46'$ *este doar complementul;* $146°46'$ *este suplementul lui* x*, nu al complementului.*

Problema 2024O-6.1. Unghiul este $132°30'$. Suplementul: $180° - 132°30' = 47°30'$. Complementul suplementului: $90° - 47°30' = 42°30'$. **Răspuns: E**
$47°30'$ *este doar suplementul.*

Problema 2024O-6.2. $0{,}1(6) = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{1}{6}$, iar $\dfrac{1}{6} \cdot 60' = 10'$, deci $x = 128°10'$.
Suplementul: $180° - 128°10' = 51°50'$. Complementul acestuia: $90° - 51°50' = 38°10'$. **Răspuns: B**
$51°50'$ *este doar suplementul.*

Problema 2024O-6.3. $0{,}(3) = \dfrac{1}{3}$ și $\dfrac{1}{3} \cdot 60' = 20'$, deci $x = 75°20'$. Suplementul: $180° - 75°20' = 104°40'$.
Dar $104°40' > 90°$, iar un unghi are complement doar dacă este mai mic de $90°$. Complementul suplementului nu există: alt răspuns. **Răspuns: E**
$14°40'$ *este complementul lui* x *însuși, nu al suplementului lui* x*.*

Problema 2024O-17.1. Unghiurile au măsurile $2k$ și $3k$. Bisectoarele formează $\dfrac{2k}{2} + \dfrac{3k}{2} = \dfrac{5k}{2} = 50°$, deci $k = 20°$. Diferența este $3k - 2k = k = 20°$ (unghiurile sunt $40°$ și $60°$). **Răspuns: A**
$100°$ *este suma unghiurilor, nu diferența.*

Problema 2024O-17.2. Unghiurile au măsurile $2k$ și $7k$. Bisectoarele formează $\dfrac{2k}{2} + \dfrac{7k}{2} = \dfrac{9k}{2} = 36°$, deci $k = 8°$. Diferența este $7k - 2k = 5k = 40°$ (unghiurile sunt $16°$ și $56°$). **Răspuns: D**
$72° = 2 \cdot 36°$ *este suma unghiurilor.*

Problema 2024O-17.3. Ca în problema 2024O-17: $k = 11°15'$, deci $m(\sphericalangle AOB) = 3k = 33°45'$ și $m(\sphericalangle BOC) = 5k = 56°15'$.
$m(\sphericalangle BOM) = \dfrac{33°45'}{2} = \dfrac{33°44'60''}{2} = 16°52'30''$. Cum $[OB$ este între $[OM$ și $[OC$,

$$m(\sphericalangle MOC) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOC) = 16°52'30'' + 56°15' = 72°67'30'' = 73°7'30''.$$

Răspuns: B

$90°$ *este* $m(\sphericalangle AOC) = 3k + 5k$*, nu* $m(\sphericalangle MOC)$*.*

Problema 2010-36.1. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = 2k$ și $m(\sphericalangle BOC) = 3k$. Atunci $2k + 3k = 150°$, deci $k = 30°$ și $m(\sphericalangle AOB) = 60°$ (iar $m(\sphericalangle BOC) = 90°$). **Răspuns: E**
$90°$ *este* $m(\sphericalangle BOC)$*.*

Problema 2010-36.2. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = nk$ și $m(\sphericalangle BOC) = (n+1)k$. Suma: $(2n+1)k = m$, deci $k = \dfrac{m}{2n+1}$. Diferența este

$$(n+1)k - nk = k = \frac{m}{2n+1}.$$

Răspuns: A

$\frac{mn}{2n+1}$ *este* $m(\sphericalangle AOB)$*, iar* $\frac{m(n+1)}{2n+1}$ *este* $m(\sphericalangle BOC)$*.*

Problema 2010-36.3. Notăm $m(\sphericalangle AOB) = a$; atunci $m(\sphericalangle BOC) = 180° - a$ (suplementare). Bisectoarele formează

$$\frac{a}{2} + \frac{180° - a}{2} = 90°,$$

oricare ar fi a, deci oricare ar fi n: raportul nu influențează rezultatul. **Răspuns: B**

Răspunsul nu depinde de n: orice cu n în formulă este o capcană.

Problema 2010-37.1. Unghiurile formate în jurul unui punct au suma 360°:

$$60° + 90° + 110° + m(\sphericalangle DOA) = 360° \implies m(\sphericalangle DOA) = 100°.$$

Răspuns: C

În jurul unui punct suma este 360°; 180° este suma doar pe o dreaptă.

Problema 2010-37.2. $[OB$ și $[OD$ sunt opuse: $m(\sphericalangle COD) = 180° - 65° = 115°$. Pe cealaltă parte: $m(\sphericalangle DOE) + m(\sphericalangle EOA) = 180° - 50° = 130°$. Cu $m(\sphericalangle AOE) = y$ și $m(\sphericalangle DOE) = y - 20°$: $2y - 20° = 130°$, deci $y = 75°$ și $m(\sphericalangle DOE) = 55°$.
$m(\sphericalangle COE) = m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOE) = 115° + 55° = 170°$;
$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle BOA) + m(\sphericalangle AOE) = 50° + 75° = 125°$. **Răspuns: E**

Verificare: $50° + 65° + 115° + 55° + 75° = 360°$.

Problema 2010-37.3. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COE$ sunt opuse la vârf ($[OA$ cu $[OC$ și $[OB$ cu $[OE$ sunt opuse), deci $m(\sphericalangle COE) = 40°$. $[OD$ este între $[OC$ și $[OE$: $3x + x = 40°$, deci $m(\sphericalangle DOE) = 10°$ și $m(\sphericalangle COD) = 30°$.
$\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle COD$ sunt adiacente suplementare ($[OA$ și $[OC$ opuse):

$$m(\sphericalangle AOD) = 180° - 30° = 150°.$$

Răspuns: A

$210° = 180° + 30°$ *este unghiul care trece prin* $[OC$ *(nu este convex).*

Problema 2010-38.1. Fie $[ON$ bisectoarea lui $\sphericalangle BOC$, cu $m(\sphericalangle BON) = b$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2b$. Atunci $m(\sphericalangle AON) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BON) = 80° + b = 90°$, deci $b = 10°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 20°$.

$$m(\sphericalangle AOC) = 80° + 20° = 100°.$$

Răspuns: B

$90°$ *este* $m(\sphericalangle AON)$*, nu* $m(\sphericalangle AOC)$*;* $20°$ *este* $m(\sphericalangle BOC)$*.*

Problema 2010-38.2. Cu $m(\sphericalangle AOB) = 2a$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2b$: $a + 2b = 85°$ și $2a + b = 95°$. Prin adunare, $3(a + b) = 180°$, deci $a + b = 60°$ și $m(\sphericalangle AOC) = 2(a + b) = 120°$. (Aici $a = 35°$ și $b = 25°$.) **Răspuns: D**

$180° = 85° + 95°$ *este suma datelor;* $60° = a + b$ *este jumătate din răspuns.*

Problema 2010-38.3. Cu $m(\sphericalangle AOB) = 2a$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2b$: $a + 2b = 80°$ și $2a + b = 100°$, deci $3(a + b) = 180°$ și $a + b = 60°$. Bisectoarele sunt de o parte și de alta a lui $[OB$:

$$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BON) = a + b = 60°.$$

(Aici $a = 40°$, $b = 20°$.) **Răspuns: C**

$120° = m(\sphericalangle AOC)$*; unghiul bisectoarelor este jumătate din* $m(\sphericalangle AOC)$*.*

Problema 2010-40.1. $95° - 4°30' = 94°60' - 4°30' = 90°30'$, iar $90°30' : 6 = 15°5'$ ($90° : 6 = 15°$, $30' : 6 = 5'$).
$2°48' + 1°42' = 3°90' = 4°30'$, iar $4°30' \cdot 4 = 16° + 120' = 18°$.
Suma: $15°5' + 18° = 33°5'$. **Răspuns: A**

$30' : 6 = 5'$*, nu* $50'$*.*

Problema 2010-40.2. *Primul termen.* $90° - 52°52'36'' = 89°59'60'' - 52°52'36'' = 37°7'24''$. Împărțim la 7: $37° : 7 = 5°$, rest $2° = 120'$; $(120' + 7') : 7 = 127' : 7 = 18'$, rest $1' = 60''$; $(60'' + 24'') : 7 = 84'' : 7 = 12''$. Rezultă $5°18'12''$.
Al doilea termen. $9°40' = 9°39'60''$, deci $9°40' - 6°29'33'' = 3°10'27''$. Înmulțit cu 4: $12°40'108'' = 12°41'48''$.
Suma. $5°18'12'' + 12°41'48'' = 17°59'60'' = 18°$. **Răspuns: D**

Secundele peste 60 *trec în minute, iar minutele peste* 60 *trec în grade.*

Problema 2010-40.3. $20°15' - 4°30' = 19°75' - 4°30' = 15°45'$, iar $15°45' : 3 = 5°15'$.
$1°20' + 0°40' = 1°60' = 2°$, iar $2° \cdot 3 = 6°$.
Suma: $5°15' + 6° = 11°15'$. Cu $1° = 60' = 3600''$ și $1' = 60''$:

$$11 \cdot 3600'' + 15 \cdot 60'' = 39600'' + 900'' = 40500''.$$

Răspuns: C

$41100''$ apare dacă se ia $1' = 100''$; $675''$ dacă $1°$ se ia ca $60''$.

Răspunsuri

Între paranteze: problema e rezolvată în alt capitol.

1. Puteri și divizibilitate

2025-20 – **A** 2025-28 – **D** 2024S-14 – **C** 2024S-18 – **D** 2024S-19 – **D**
2024S-22 – **D** 2024S-36 – **E** 2024S-37 – **C** 2024S-38 – **E** 2024O-2 – **C**
2024O-9 – **B** 2016-7 – **C** 2010-8 – **D** 2010-9 – **D** 2010-12 – **D**

1A. Puteri și divizibilitate – exerciții asemănătoare

2025-20.1 – **C** 2025-20.2 – **E** 2025-20.3 – **B** 2025-28.1 – **C** 2025-28.2 – **E**
2025-28.3 – **A** 2024S-14.1 – **D** 2024S-14.2 – **C** 2024S-14.3 – **A** 2024S-18.1 – **B**
2024S-18.2 – **A** 2024S-18.3 – **E** 2024S-19.1 – **A** 2024S-19.2 – **C** 2024S-19.3 – **D**
2024S-22.1 – **B** 2024S-22.2 – **B** 2024S-22.3 – **E** 2024S-36.1 – **A** 2024S-36.2 – **A**
2024S-36.3 – **E** 2024S-37.1 – **C** 2024S-37.2 – **A** 2024S-37.3 – **B** 2024S-38.1 – **C**
2024S-38.2 – **E** 2024S-38.3 – **E** 2024O-2.1 – **A** 2024O-2.2 – **B** 2024O-2.3 – **A**
2024O-9.1 – **D** 2024O-9.2 – **D** 2024O-9.3 – **B** 2016-7.1 – **C** 2016-7.2 – **B**
2016-7.3 – **E** 2010-8.1 – **B** 2010-8.2 – **D** 2010-8.3 – **E** 2010-9.1 – **B**
2010-9.2 – **C** 2010-9.3 – **B** 2010-12.1 – **E** 2010-12.2 – **A** 2010-12.3 – **A**

2. Unghiuri

2025-34 – **B** 2024S-10 – **D** 2024S-16 – **C** 2024S-21 – **C** 2024S-40 – **D**
2024O-5 – **C** 2024O-6 – **B** 2024O-17 – **D** 2010-36 – **D** 2010-37 – **A**
2010-38 – **C** 2010-40 – **C**

2A. Unghiuri – exerciții asemănătoare

2025-34.1 – **D** 2025-34.2 – **C** 2025-34.3 – **E** 2024S-10.1 – **A** 2024S-10.2 – **B**
2024S-10.3 – **E** 2024S-16.1 – **B** 2024S-16.2 – **A** 2024S-16.3 – **B** 2024S-21.1 – **B**
2024S-21.2 – **A** 2024S-21.3 – **E** 2024S-40.1 – **A** 2024S-40.2 – **B** 2024S-40.3 – **E**
2024O-5.1 – **D** 2024O-5.2 – **E** 2024O-5.3 – **A** 2024O-6.1 – **E** 2024O-6.2 – **B**
2024O-6.3 – **E** 2024O-17.1 – **A** 2024O-17.2 – **D** 2024O-17.3 – **B** 2010-36.1 – **E**
2010-36.2 – **A** 2010-36.3 – **B** 2010-37.1 – **C** 2010-37.2 – **E** 2010-37.3 – **A**
2010-38.1 – **B** 2010-38.2 – **D** 2010-38.3 – **C** 2010-40.1 – **A** 2010-40.2 – **D**
2010-40.3 – **C**